



MODELADO Y CONTROL DE UN ROBOT MÓVIL TIPO NEWT EN LA TAREA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

MODELING AND TRAJECTORY TRACKING CONTROL OF A NEWT MOBILE ROBOT

Molina Vilchis

CIDETEC-IPN. Departamento de Postgrado. Área de Mecatrónica.
Unidad Profesional Adolfo López Mateos. C.P. 07700, México, D.F. MÉXICO.
mamolinav@ipn.mx

Portilla Flores

CIDETEC-IPN. Departamento de Postgrado. Área de Mecatrónica.
Unidad Profesional Adolfo López Mateos. C.P. 07700, México, D.F., MÉXICO.
aportilla@ipn.mx

Marciano Melchor

CIDETEC-IPN. Departamento de Postgrado. Área de Mecatrónica.
Unidad Profesional Adolfo López Mateos. C.P. 07700, México, D.F., MÉXICO.
mmarciano@ipn.mx

Hernández Guzmán

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería.
Ap. Postal 3-24. C.P. 76150, Querétaro, Qro., MÉXICO. e-mail: vmhg@uaq.mx

Silva Ortigoza

Universidad Autónoma de Puebla. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.
Ap. Postal 1152, Puebla, Pue., MÉXICO. e-mail: gsilva@fcfm.buap.mx

RESUMEN

En este trabajo se presenta una derivación del modelo cinemático de un robot móvil de ruedas tipo Newt, mediante la teoría Lagrangiana de la mecánica clásica. Considerando el modelo cinemático del móvil obtenido, se propone un control sencillo basado en linealización de entrada-salida que permite llevar a las variables de estado (x, y, φ) a que sigan una trayectoria nominal (x^*, y^*, φ^*) , bajo la condición de que el móvil se encuentra inicialmente sobre un punto de esta trayectoria, que sin pérdida de generalidad se elige como $(0, 0, 0)$. De esta forma se lleva a cabo la tarea de control de seguimiento de trayectoria del móvil. El desempeño de la estrategia de control propuesta para el robot móvil tipo Newt se verifica mediante simulaciones computacionales.

Palabras Clave: Robots Móviles, Modelo Cinemático, Seguimiento de Trayectoria.

ABSTRACT

In this paper we obtain the kinematic model of a Newt mobile robot by using a Lagrangian approach. We take into account this kinematic model to design a simple controller for trajectory tracking of both robot position and robot orientation. Input-output linearization is the main tools that we use to design this controller. We verify performance of the closed



loop system by means of numerical simulations.

Keywords: Mobile Robot, Kinematic Model, Trajectory Tracking.

INTRODUCCIÓN

La rob tica m vil resulta ser un tema de investigación fascinante por varias razones:

En primer lugar, porque debido al grado de inteligencia y todo lo que implica su implementación, se requiere de la aplicación sinérgica de conocimientos y técnicas de varias disciplinas (física, matemáticas, mecánica, electrónica, control automático y computación).

Segundo, porque los robots móviles son una aproximación muy cercana a la creación de un agente inteligente (Russell y Norving 2003): sistema capaz de procesar la información de su entorno y establecer un comportamiento similar al del ser humano.

Como tercer aspecto, porque las aplicaciones de los robots móviles son innumerables. Ejemplos de aplicación de los robots móviles son: exploración planetaria, minera y marítima, reconocimiento de terreno, inspección y vigilancia, misiones de búsqueda, y rescate de personas, limpieza de desechos peligrosos y en ambientes diversos, asistencia médica, ocio y entretenimiento, investigación y desarrollo, Investigación militar, industria metal-mecánica, industria química, agricultura, transporte, entre otros.

En complemento, y con el objetivo de conformar una herramienta más eficaz, también son utilizados como plataformas móviles en aplicaciones que requieren de la integración con otros tipos de robots, tal es el caso de los robots móviles que incorporan un brazo manipulador, utilizados como elementos de seguridad en la inspección y manejo de paquetes sospechosos, neutralización de dispositivos explosivos, manipulación de productos químicos peligrosos y materiales radioactivos, etc.

Y finalmente, debido al elemento est tico y artístico que se le puede dar a la estructura física de los robots móviles.

Un robot móvil se define como un sistema electromecánico capaz de desplazarse en forma autónoma de un punto a otro en un determinado espacio de trabajo (nave industrial, laboratorio, hogar, corredor, etc.).

Se entiende como autonomía de un robot móvil, al dominio que tiene este para determinar su curso de acción, mediante su propio proceso de razonamiento (basado en sensores que le permiten percibir el espacio de trabajo), en lugar de seguir una secuencia fija de instrucciones. En la mayoría de los casos su control se lleva a cabo en lazo cerrado.

De acuerdo al tipo de locomoción que emplean los robots móviles para desplazarse, se clasifican en tres categorías: robots de ruedas (Alexander y Maddocks, 1989; Champion, et al., 1996; Muir y Neuman, 1986, 1987), robots de patas (Raibert, et al., 1983; Todd,



1985) y robots de orugas (Granosik y Borenstein, 2005; Iwamoto y Honma, 1983). La mayoría de los robots móviles que se han reportado en trabajos, construido y evaluado, utilizan ruedas para su locomoción.

Esto se debe a que los robots móviles de ruedas (RMR) son más eficientes en energía que los robots de patas o de orugas en superficies lisas y firmes (Bekker, 1960; Bekker, 1969). Por otro lado, los RMR requieren un número de partes menor y menos complejas, en comparación con los robots de patas o de orugas, lo que permite que su construcción sea más fácil.

Adicionalmente, el control de las ruedas es menos complejo que la actuación de las patas o de las orugas, además de que causan menor desgaste de la superficie en comparación con las bandas de las orugas (Holland, 1983). En el diseño de RMR se utilizan cuatro tipos de ruedas: convencionales, tipo castor, omnidireccionales y ruedas de bolas.

Los arreglos cinemáticos más comunes de RMR documentados en la literatura tienen dos ruedas motrices diametralmente opuestas i.e., dos ruedas convencionales paralelas, una en cada lado del robot, y una o dos ruedas de avance omnidireccional para mantener estable el móvil (una alternativa de diseño práctico es sustituir éstas por ruedas de tipo bola o de tipo castor). Entre los arreglos cinemáticos de RMR con dos ruedas motrices, los más ampliamente conocidos son: Newt (Hollis, 1977), Shakey (Nilsson, 1984) y Hilare (Giralt, et al., 1979).

De manera general se puede decir que un RMR se compone de dos sistemas, a saber:

1. De una arreglo cinemático.
2. De un sistema de actuadores, los cuales permiten el movimiento de la estructura cinemática. Estos sistemas son dignos de estudiarse en conjunto. Sin embargo, una separación de los tópicos ha contribuido a un avance más rápido del estado del arte, debido a la complejidad que involucra el estudiarlos en conjunto. En este trabajo centramos nuestra atención solo en el primer sistema i.e., en el arreglo cinemático del móvil y en particular en el RMR tipo Newt.

En lo que respecta al estudio de los arreglos cinemáticos de los RMR, la derivación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la cinemática y dinámica de las diferentes estructuras de RMR se han llevado a cabo en (Alexander y Maddocks, 1989; Champion, et al., 1996; Muir y Neuman, 1986, 1987), respectivamente.

Para hacer más tratable el problema de modelado, en la obtención de los modelos cinemáticos de RMR, es común introducir suposiciones de diseño y de operación prácticas (Muir y Neuman, 1986). Dentro de las suposiciones de diseño se encuentran las siguientes: 1. El RMR no contienen partes flexibles. 2. Las ruedas cuando mas tienen un eslabón de dirección. 3. Todos los ejes de dirección son perpendiculares a la superficie.



Mientras que las suposiciones de operación que se consideran son:

1. Los RMR se mueven sobre una superficie plana.
2. La fricción de traslación en el punto de contacto entre la rueda y la superficie es suficientemente grande para que ningún deslizamiento ocurra.
3. La fricción rotatoria en el punto de contacto entre la rueda y la superficie es suficientemente pequeña para que el desplazamiento rotatorio ocurra.

Aunque estas suposiciones son bastante realistas, algunos investigadores han desarrollado modelos matemáticos más complejos para robots móviles con ruedas convencionales, donde se toma en cuenta el movimiento de deslizamiento que existe entre las ruedas del móvil y la superficie de movimiento, véanse (Balakrishna y Ghosal, 1995; Hamdy y Badreddin, 1992; Rajagopalan, 1997; Scheduling, et. al, 1999; Shekhar, 1997). Un modelo dinámico para robots móviles omnidireccionales que toma en cuenta el desplazamiento entre las ruedas y la superficie de movimiento se reporto en (Williams, et al., 2002).

En las últimas décadas el control de los RMR ha sido objeto de interés continuo. Estos se enmarcan dentro de la teoría de control en el área que se conoce como control de sistemas no-holónomos, los cuales se caracterizan por estar sujetos a restricciones no integrales en las velocidades, es decir su plano de velocidades está restringido (Murray, 1993).

Otros ejemplos de sistemas no-holónomos son: los satélites y las manos actuadas. Desde el punto de vista de la teoría de control, los principales problemas asociados a los robots móviles son: la regulación a un punto de equilibrio del móvil, el seguimiento de trayectorias, la planificación de trayectorias y la evasión de obstáculos. En este trabajo se aborda el problema asociado al seguimiento de trayectorias en un RMR tipo Newt.

De acuerdo a (Brockett, 1983), se sabe que un sistema no-hol nomo no puede ser estabilizado asintóticamente a un punto de equilibrio por medio de una ley de control diferenciable, a pesar de que el sistema sea completamente controlable.

En consecuencia, el problema de estabilización de sistemas no-holónomos solo puede lograrse mediante leyes de control no diferenciables (Canudas de Wit y Sordalen, 1992) o dependientes del tiempo (Coron, 1992; Coron y D'Andrea-Novel, 1992; Samson, 1991; Samson, 1995; Pomet, 1992). En tanto que, el problema de seguimiento de trayectoria de sistemas no-holónomos puede llevarse a cabo por medio de leyes de control diferenciables.

El diseño de controladores para resolver este problema ha sido abordado desde diferentes puntos de vista. En (Divelbiss y Wen, 1997) se presentaron resultados experimentales del control de seguimientos de trayectoria en un robot móvil tipo trailer. Para controlar el movimiento del móvil ahí se propuso un esquema de control jerarquizado en dos niveles. El nivel bajo en la jerarquía de control consiste en dos sistemas de control de velocidad independientes, uno para el motor de tracción y otro para el motor de dirección.



El control de velocidad de los motores se lleva a cabo con controladores PID sincronizados en forma individual, aunque no es transparente el modelo dinámico que se emplea. El nivel alto de control jerarquizado se encarga de controlar el modelo cinemático del móvil para llevar a cabo la tarea de seguimiento de trayectoria.

El controlador de este nivel se basa en un esquema de control LQR (Linear Quadratic Regulador) y se encarga de generar los perfiles de velocidad deseados para el control de nivel bajo.

En (Aranda, et. al., 2002) se presentaron resultados en simulación y experimentales del control de seguimiento de trayectoria en un RMR tipo Newt. En (Aranda, et. al, 2002) se propuso un control jerárquico en dos niveles: control interno y control externo.

El lazo de control interno, compuesto de dos controladores PID, se encarga de controlar las velocidades angulares de los motores que generan la tracción del móvil. El diseño de los controladores PID toma en cuenta que el valor de las inductancias de armadura son despreciables, i. e., $L = 0$. El lazo de control externo consiste en un esquema de linealización entrada-salida por retroalimentación de estado.

Este control se asocia al modelo cinemático del móvil y se encarga en generar los perfiles de velocidad angular deseados de los motores. Con el fin de evitar las singularidades inherentes a este tipo de leyes de control, se propone un esquema de control de estructura variable el cual conmuta entre dos variables de salida diferentes.

Por otro lado, explotando la propiedad de planitud diferencial que satisface el modelo cinemático del robot móvil tipo Newt (Sira-Ramirez y Agrawal, 2004), en (Chacal y Sira-Ramirez, 1994) se propuso un control basado en modos deslizantes. En la referencia (Yang, et al., 1998), linealizando el modelo dinámico de un RMR por medio del método del par calculado (Lewis, et al., 1993), se llevo a cabo el control de seguimiento de trayectorias a través de un control basado en modos deslizantes.

Mientras que, en (Takana y Yoshioka, 1995) se presentó un controlador difuso para el control de seguimiento de trayectoria de un tractor con cinco trailers, en tanto que para la evasión de obstáculos del móvil mencionado se diseño un controlador basado en un algoritmo genético.

El objetivo de este trabajo es obtener el modelo cinemático de un RMR tipo Newt empleando la teoría Lagrangiana de la mecánica clásica, y sobre la base de este diseñar un control de seguimiento de trayectorias preestablecidas en el plano cartesiano.

Para el modelo cinemático del RMR, se propone un control sencillo que permite llevar a las variables de estado, (x, y, φ) a que sigan una trayectoria nominal, (x^*, y^*, φ^*) , bajo la condición de que el móvil se encuentre inicialmente sobre un punto de esta trayectoria, que sin pérdida de generalidad se elige como $(0,0,0)$.

Esto se lleva a cabo mediante un controlador basado en linealización de entrada-salida $((w_d, w_i) - (x, \varphi))$, el cual impone que las variedades de estado (x, φ) tiendan asintóticamente a la trayectoria deseada (x^*, φ^*) generando una dinámica remanente



asociada a la variable de estado y , la cual resulta ser estable. Mas aun, si las componentes de la trayectoria, x^* y y^* , son tales que $y^* = f(x^*)$, donde $f(x^*)$ es una función suave y es tal que $f(0) = 0$, entonces, un cálculo directo muestra que $y(t) = f(x^*(t)) = y^*$.

Este trabajo esta organizado como sigue. En la siguiente sección se presenta una deducción del método cinemático del robot móvil tipo Newt, mediante la teoría Lagrangiana de la mecánica clásica. A continuación se presenta un controlador basado en linealización de entrada-salida para el modelo cinemático del móvil.

Posteriormente se presentan algunos resultados obtenidos en simulación, con la finalidad de evaluar el desempeño del controlador propuesto. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo, así como trabajos futuros y probables extensiones del mismo.

Modelo Cinemático del Robot Móvil

El robot móvil bajo estudio es un vehículo que tiene dos llantas traseras, izquierda y derecha, idénticas que son paralelas entre sí, no deformables y unidas por un eje. Además, usa una rueda frontal omnidireccional que asegura que la plataforma del robot se encuentre sobre un plano.

Suponiendo que el movimiento se lleva a cabo sobre el plano XY y que las llantas ruedan sin deslizarse, en la literatura existente se encuentra que las ecuaciones que describen la cinemática del móvil están dadas por (Sira y Agrawal, 2004).

$$\begin{aligned} x &= \frac{(w_l + w_d)r}{2} \cos \varphi \\ y &= \frac{(w_l + w_d)r}{2} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \frac{(w_d - w_l)r}{2l} \end{aligned} \quad (1)$$

donde (x, y) denota la posición del punto medio del eje que une las dos llantas traseras, φ es el ángulo que forma el eje de simetría del móvil respecto al eje X positivo, w_l y w_d son las velocidades angulares de las llantas izquierda y derecha, respectivamente, mientras que r es el radio de las llantas y $2l$ es la separación entre ellas, para mayor claridad véase la Fig. 1. En estas ecuaciones, y en lo que resta del trabajo, la derivada con respecto al tiempo, t , se denota por un punto.

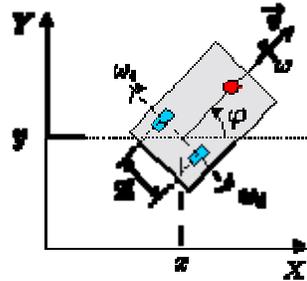


Fig. 1. Diagrama del robot móvil.

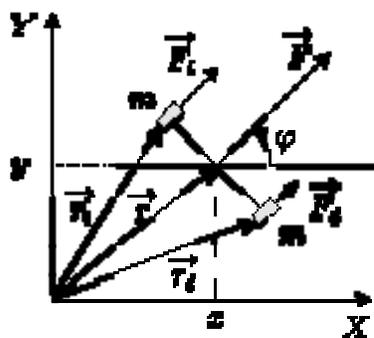
En esta sección se presenta una derivación de las ecuaciones (1). Para este propósito, únicamente se consideran las llantas traseras del móvil, izquierda y derecha, y se supone que sobre cada una de estas actúa una fuerza, F_1 y F_2 , que proporcionan las velocidades dadas, v_1 y v_2 , respectivamente.

Usando como coordenadas generalizadas a (x, y, φ) , ver Fig. 2 (a) y 2 (b), se encuentra que la posición de los puntos de contacto de cada una de las llantas con el plano XY esta dada por

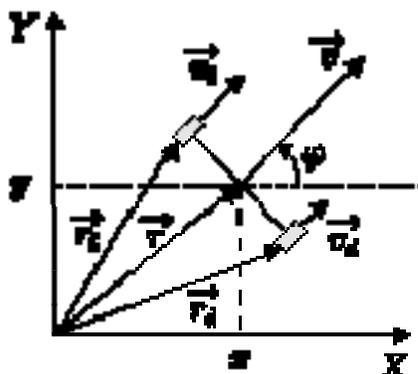
$$\begin{aligned} r_1 &= (x - l \sin \varphi) \hat{x} + (y + l \cos \varphi) \hat{y}, \\ r_2 &= (x + l \sin \varphi) \hat{x} + (y - l \cos \varphi) \hat{y}, \end{aligned} \quad (2)$$

de donde se encuentra que si m es la masa de cada una de las llantas, entonces la energía cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{m}{2} (|\dot{r}_1|^2 + |\dot{r}_2|^2) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2). \quad (3)$$



(a) Diagrama de fuerzas



(b) Diagrama de velocidades.

Fig. 2. Diagrama de fuerzas y velocidades asociadas al RMR.

De acuerdo con la teoría Lagrangiana de la mecánica clásica, las ecuaciones de movimiento del sistema físico están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y \end{aligned} \quad (4)$$

donde Q_x , Q_y , Q_φ , son las denominadas componentes de la fuerza generalizada, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} Q_x &= F_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + F_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x} = (F_1 + F_2) \cdot x, \\ Q_y &= F_1 \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y} + F_2 \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y} = (F_1 + F_2) \cdot y, \\ Q_\varphi &= F_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + F_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = \\ &= l(F_2 - F_1) \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

Usando (2)-(5), un cálculo directo muestra que las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x} &= (F_1 + F_2) \cdot x, \\ 2m\ddot{y} &= (F_1 + F_2) \cdot y, \\ 2ml^2 \ddot{\varphi} &= l(F_2 + F_1) \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi) \end{aligned} \quad (6)$$



Puesto que son las fuerzas que actúan sobre las llantas izquierda y derecha, respectivamente, proporcionando las velocidades entonces

$$\begin{aligned} F_x &= \omega v_x = \omega v_x (\cos \varphi i + \sin \varphi j), \\ F_y &= \omega v_y = \omega v_y (\cos \varphi i + \sin \varphi j). \end{aligned} \quad (7)$$

donde v_x y v_y son las magnitudes de las aceleraciones de las llantas izquierda y derecha respectivamente. Usando (6) y (7), después de realizar una integración respecto al tiempo y simplificar, se encuentra que

$$\begin{aligned} 2x &= (v_x + v_y) \cos \varphi + c_x, \\ 2y &= (v_x + v_y) \sin \varphi + c_y, \\ 2l\varphi &= (v_x - v_y) + c_\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

donde c_x , c_y y c_φ son tres constantes de integración.

Finalmente, si ω_l y ω_d son las velocidades angulares de las llantas izquierda y derecha, respectivamente, la condición de rodadura sin deslizamiento es equivalente a imponer que

$$\begin{aligned} v_x &= r\omega_l, \\ v_y &= r\omega_d. \end{aligned} \quad (9)$$

de donde se obtiene que las ecuaciones del modelo cinemático cuando las constantes de integración c_x , c_y y c_φ son iguales a cero, están dadas por

$$x = \frac{(v_x + v_y) t}{2} \cos \varphi \quad (10)$$

$$y = \frac{(v_x + v_y) t}{2} \sin \varphi \quad (11)$$

$$\varphi = \frac{(v_x - v_y) t}{2l} \quad (13)$$

Por otra parte, φ es igual a la magnitud, w , de la velocidad angular con la que el eje de simetría del móvil rota con respecto al sistema de referencia inercial XY. Por lo tanto, se tiene la siguiente relación.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & -\frac{r}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_l \\ \omega_d \end{pmatrix} \quad (14)$$

Es decir, cuando las constantes de integración c_x , c_y y c_φ son iguales a cero, las ecuaciones que describen la cinemática del robot, se pueden reescribir de la siguiente forma



$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi, \\ \varphi &= w.\end{aligned}\quad (15)$$

Control del Modelo Cinemático del RMR

En la sección II, hemos mostrado que las ecuaciones que describen la cinemática del robot móvil se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}x &= \frac{(w_d + w_i) r}{2} \cos \varphi, \\y &= \frac{(w_d + w_i) r}{2} \sin \varphi, \\ \varphi &= \frac{(w_d - w_i) r}{2}.\end{aligned}\quad (16)$$

El objetivo de esta sección es dise  nar un control sencillo que permita llevar a las variables de estado, (x, y, φ) , a que sigan una trayectoria nominal, (x^*, y^*, φ^*) , bajo la condición de que el móvil se encuentre inicialmente sobre un punto de esta trayectoria, que sin pérdida de generalidad se elige como $(0, 0, 0)$. De (16) es claro que para r y l dados.

La   nica forma de controlar las variables de estado, (x, y, φ) , a que sigan una trayectoria deseada, (x^*, y^*, φ^*) , queda determinada por la elección apropiada de w_d y w_i , las cuales son conocidas como variables de control del móvil. Es decir, estamos interesados en determinar los perfiles de w_d y w_i tales que $x \diamond x^*$, $y \diamond y^*$ y $\varphi \diamond \varphi^*$, con la condición inicial: $x=0, y=0$ y $\varphi=0$.

Dadas las entradas de control (w_d y w_i), un controlador basado en linealización de entrada-salida, mediante realimentación est  tica, podría llevarse a cabo para cualquier par de salidas: (x, y) , (x, φ) o (y, φ) . En consecuencia, en cada uno de los casos, existiría una dinámica remanente o dinámica cero, que para asegurar que el sistema en lazo cerrado sea estable es crucial analizar su propiedad de estabilidad.

Es este trabajo, siguiendo (Aranda, et al., 2002), se dise  na un control sobre las variables de salida (x, φ) y se estudia la estabilidad en lazo cerrado de la dinámica remanente, asociada a la variable de estado y . Para este propósito, reescribimos las ecuaciones, (16), que describen la cinemática del robot móvil en dos subsistemas. El primero, dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \frac{r \cos \varphi}{2} \\ \frac{r \sin \varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

el cual involucra únicamente las variables de estado a controlar, (x, φ) , y el segundo

$$y = \frac{(w_d + w_i) r}{2} \sin \varphi, \quad (18)$$

toma en cuenta la dinámica remanente asociada a la variable de estado y , una vez que se han controlado los estados (x, φ) , es decir, $x \diamond x^*$ y $\varphi \diamond \varphi^*$.

Puesto que, $\det(A_1) = -\frac{r^2 \cos \varphi}{2}$, es claro que se puede proponer un controlador donde

se toma como salida al par (x, φ) excepto en $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ donde $k = (+/-)1, (+/-)3, (+/-)5, \dots$. Es decir, siempre que A_1 sea invertible. Para obtener la relación entre los controles de entrada, (w_d, w_i) , y las variables de salida, (x, φ) , de (17) se obtiene directamente que:

$$\begin{pmatrix} w_d \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \varphi} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r \cos \varphi} & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (19)$$

De estas relaciones de entrada-salida, se obtiene que los controles, (w_d, w_i) , que permiten que los estados (x, φ) tiendan asintóticamente a la trayectoria deseada (x^*, φ^*) , se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} w_d \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \varphi} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r \cos \varphi} & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\varphi \end{pmatrix} \quad (20)$$

donde u_x y u_φ son dos variables auxiliares de control, las cuales se prescriben como

$$\begin{aligned} u_x &= x - \alpha_x (x - x^*), \\ u_\varphi &= \varphi - \alpha_\varphi (\varphi - \varphi^*). \end{aligned} \quad (21)$$

De esta manera, la dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado, queda determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= -\alpha_x e_x = 0, \\ \dot{e}_\varphi &= -\alpha_\varphi e_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

donde $e_x = x - x^*$ y $e_\varphi = \varphi - \varphi^*$, denotan los errores de seguimiento de las variables x y φ , respectivamente, y son dos constante positivas. De (22) se tiene que cuando y por tanto , el cual es el objetivo deseado de control. Ahora, analicemos la dinámica remanente asociada con la variable de estado y . Es decir, encontraremos el comportamiento de y cuando . Para este propósito, en (18) se reemplaza φ por φ^* y se sustituyen los controles, w_d y w_i , dados por (20) y (21), obteniendo que



$$y = [x' - \alpha_1(x - x^*)] \tan \varphi'. \quad (23)$$

Por lo tanto, cuando $t \rightarrow \infty$,

$$y = x' \tan \varphi'. \quad (24)$$

Si x^* y y^* son tales que

$$y^* = f(x^*). \quad (25)$$

donde $f(x^*)$ es una función suave y es tal que $f(0) = 0$, entonces usando (16) y (25), un cálculo directo muestra que

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) - \arctan\left(\frac{df(x^*)}{dx^*}\right), \quad (26)$$

de donde se obtiene que (24) se reduce a

$$y = x' \tan \varphi' = x' \left(\frac{df(x^*)}{dx^*} \right) = \frac{df(x^*)}{dt} \quad (27)$$

Por lo tanto, integrando se obtiene que

$$y(t) = f(x^*(t)) = y^*, \quad (28)$$

donde se ha elegido la constante de integración de tal manera que $y(0) = f(0) = 0$.

En conclusión se ha mostrado que bajo la condición inicial $(x, y, \varphi) = (0, 0, 0)$, los controles (20) imponen que las variables de estado (x, y, φ) tiendan a (x^*, y^*, φ^*) respectivamente.

Simulaciones

En esta sección se llevan a cabo simulaciones del sistema en lazo cerrado, con la finalidad de evaluar el desempeño del controlador propuesto. Aplicamos nuestros resultados generales al caso particular cuando la trayectoria deseada es una parábola. Es decir,

$$y^*(t) = x^2(t). \quad (29)$$

Eligiendo la siguiente parametrización, ver (Bricaire, et. al, 2002):

$$x^*(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right), \quad (30)$$

se encuentra que $\varphi^*(t)$ está determinada por la siguiente ecuación

$$\varphi^*(t) = \arctan(2x^*(t)) \quad (31)$$

Con esta parametrización el RMR se desplazará del origen al punto (a, a2), posteriormente al punto (-a, a2) pasando por el origen, y finalmente retornará al origen, todo esto en un tiempo de P segundos. El valor de los parámetros A y P, asociados a (30), se propusieron como: A = 1.5 m y P = 90 s.

En las simulaciones realizadas, se consideraron los siguientes parámetros para el modelo cinemático del robot móvil: r = 6.5 cm, l = 15 cm.

En la Fig. 3 se muestra en simulación el desempeño de las variables mecánicas en lazo cerrado del RMR tipo Newt, usando el control basado en linealización de entrada-salida, para la estructura cinemática del robot móvil, (20)-(21). En esta figura se observa como el control de seguimiento de trayectoria para la estructura cinemática del RMR se lleva a cabo con éxito, como era de esperarse de acuerdo a lo desarrollado en la sección III.

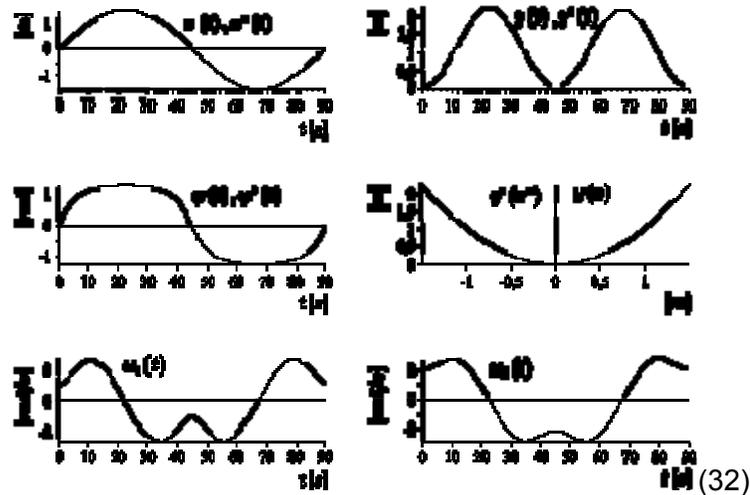


Fig. 3. Resultados obtenidos en simulación en lazo cerrado del RMR.

Conclusiones

En este trabajo se ha diseñado el control de un RMR tipo Newt para llevar a cabo la tarea de seguimiento de trayectoria, obteniendo resultados satisfactorios a nivel simulación. Más específicamente, este diseño controla el modelo cinemático del móvil. Este es un control sencillo y se basa en linealización de entrada-salida (w_d, w_i) - (x, φ), generando una dinámica remanente para y , que resulta ser estable.

A diferencia de técnicas de control no lineal que conmutan entre dos leyes de control para llevar a cabo el control de todas las variables de estado. Este control determina los perfiles de w_d y w_i tales que $x \diamond x^*$, $y \diamond y^*$ y $\varphi \diamond \varphi^*$ con la condición inicial: $x=0$, $y=0$ y $\varphi=0$. Una de sus desventajas es que se indefin en $\varphi = k/2$, para $k = (+/-)1, (+/-)3, (+/-)5, \dots$.



También, en esta investigación se observó que una propuesta de control basada en linealización de entrada-salida para $(w_d, w_i) - (x, y)$, resulta imposible, pues la matriz que las asocia es singular.

Mientras que, para la propuesta de entrada-salida $(w_d, w_i) - (y, \phi)$, resulta posible siempre que para $k=0, (+/-)1, (+/-)2, \dots$, pues en estos puntos la matriz que relaciona estas entradas-salidas se vuelve singular, pero impone que inicialmente siendo ésta una suposición bajo la cual se dise  n   el controlador propuesto en este trabajo.

Finalmente, debemos mencionar que en futuras investigaciones se pretende tomar en cuenta la dinámica asociada a los actuadores (los cuales permiten el movimiento del RMR), para generar los perfiles de velocidad angular, (w_d, w_i) , que se requieren en el modelo cinemático del móvil.

Además, es importante comentar que actualmente se está dise  nando un prototipo de RMR tipo Newt, con la finalidad de implementar sobre éste la ley de control dise  nada en tiempo real, y de esta manera comparar los resultados aquí obtenidos con los obtenidos en tiempo real.

Agradecimientos

RSO agradece el soporte económico recibido por la Secretaria de Investigación y Posgrado del IPN (SIP-IPN), a través del proyecto 20080821 y del programa EDI, así como del Sistema Nacional de Investigadores (SNI-México).

MAMV agradece el apoyo recibido por los programas EDD y COFAA del IPN. VMHG agradece al SNI el soporte económico recibido. GSO agradece el soporte económico recibido por la UAP, así como del SNI. Finalmente, MMM agradece el apoyo recibido por la SIP-IPN, a través del proyecto 20080161 y del programa EDI.

Referencias

- (1) ALEXANDER J. C. and MADDOCKS J. H. On the kinematics of wheeled mobile robots, *Int. J. Robotics Res.*, vol. 8, pp. 15 – 27, 1989.
- (2) ARANDA B. E, SALGADO J. T. and VELASCO V. M., Control no lineal discontinuo de un robot m  vil, *Computaci  n y Sistemas*, N  mero Especial, pp. 42-49, 2002.
- (3) BALAKRISHNA R. and GHOSAL A., Modeling of slip for wheeled mobile robots, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, vol. 11, pp.126-132, 1995.
- (4) BEKKER M. G., *Introduction to Terrain-Vehiclen Systems*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1969
- (5) BEKKER M. G., *Off-The-Road Locomotion*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1960.



- (6) BROCKETT R. W., Asymptotic stability and feedback stabilization, In Differential Geometric Control Theory, Brockett R. W., Millmann R. S. and Sussmann H. J., Eds. Boston, MA: Birkhauser, 1983, pp. 181-191.
- (7) CAMPION G., BASTIN G. and D'ANDR A-NOVEL B., Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots, IEEE Trans. Robot. Automat, vol. 12, pp. 47-62, 1996.
- (8) CANUDAS DE WIT C. and SORDALEN O. J., Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, pp. 1791-1797, 1992.
- (9) CHACAL B J. A. and SIRA-RAMIREZ H., On the sliding mode control of wheeled mobile robots, in Proc. of the IEEE Conf. Sys. Man. Cybern, 1994, pp. 1938-1943.
- (10) CORON J. M. and D'ANDREA-NOVEL B, Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems Application to mobile robots, in Proc. of the IFAC Conf. Nonlinear Control Systems Design (NOLCOS), Bordeaux, France, 1992, pp. 649-654.
- (11) CORON J. M., Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift, Math. Contr. Signals Syst, vol. 5, pp. 295-312, 1992.
- (12) DIVELBISS A. W. and WEN J. T., Trajectory tracking control of a car-trailer system, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol, vol. 5, pp. 269-278, 1997.
- (13) GIRALT G., SOBEK R. and CHATILA R., A multi-level planning and navigation system for a mobile robot; A first approach to Hilare", in Proc. of the IJCAI, Tokyo, Japan, 1979, pp. 335-338.
- (14) GRANOSIK G. and BORENSTEIN J., Integrated joint actuator for serpentine robots, IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, vol. 10, pp. 473-481, 2005.
- (15) HAMDY A. and BADREDDIN E., Dynamic modeling of a wheeled mobile robot for identification, navigation and control, in Proc. Of the IMACS Conf. Modeling and Control of Technol. Syst., 1992, pp. 119-128.
- (16) HOLLAND J. M., Basic Robotics Concepts. Howard W. Sams & Co., Indianapolis, IN, 1983, pp. 107-170.
- (17) HOLLIS R., Newt: a mobile, cognitive robot, Byte, vol. 2, pp. 30-45, 1977.
- (18) IWAMOTO T., YAMAMOTO H. and HONMA K., Transformable crawler mechanism with adaptability to terrain variations, in Proc. of the International Conference on Advanced Robotics, Tokyo, Japan, 1983, pp. 285-292.
- (19) LEWIS F. L., ABDALLAH C. T. and DAWSON D. M., Control of robot manipulators, Macmillan, New York, 1993.



- (20) MUIR P. F. and NEUMAN C. P., Kinematic modeling of wheeled mobile robots, Robotics Institute Technical Report No. CMU-RI-TR-86-12, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1986.
- (21) MUIR P. F. and NEUMAN C. P., Kinematic modeling of wheeled mobile robots, Journal of Robotic Systems, vol. 4, pp. 281-340, 1987.
- (22) MURRAY R. M., Nonholonomic motion planing: steering using sinusoids, IEEE Trans. Automat. Contr, vol. 38, pp. 700-716, 1993.
- (23) NILSSON N. J., Shakey the Robot, Technical Note 323, Artificial Intelligence Center, Computer Science and Technology Division, SRI International, Menlo Park, CA, 1984.
- (24) POMET J. B., Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift, Syst. Contr. Lett., vol. 18, pp. 147-158, 1992.
- (25) RAIBERT M. H., BROWN H., CHEPPONIS M., HASTINGS E., KOECHLING J., MURPHY K. N., MURPHY S., MURTHY S. and STENTZ A., Dynamically stable legged locomotion, Robotics Institute Technical Report No. CMU-RI-TR-83-20, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1983.
- (26) RAJAGOPALAN R., A generic kinematic formulation for wheeled mobile robots, J. Robot. Syst, vol. 14, pp. 77-91, 1997.
- (27) RUSSELI S. and NORVIG P., Artificial intelligence: a modern approach, Prentice Hall. Second Edition, 2003.
- (28) SAMSON C., Control of chained systems Applications to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots, IEEE Trans. Automat. Contr, vol. 40, pp. 64-77, 1995.
- (29) SAMSON C., Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart, In Advanced Robot Control, C. Canudas, Ed., vol. 162 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. New York Springer-Verlag, 1991, pp. 125-151.
- (30) SCHEDING S, DISSANAYAKE G., NEBOT E. M., and DURRANT-WHYTE H., Experiment in autonomous navigation of an underground mining vehicle, IEEE Trans. Robot. Automat, vol. 15, pp. 85-95, 1999.
- (31) SHEKHAR S., Wheel rolling constraints and slip in mobile robots, in Proc. of the IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 1997, vol. 3, pp. 2601-2607.
- (32) SIRA-RAM IREZ H. and AGRAWAL S. K., Differentially Flat Systems, Marcel Dekker, New York, 2004.
- (33) TANAKA K. and YOSHIOKA K., Fuzzy trajectory control and GA-based obstacle avoidance of a truck with five trailers, in Proc. of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1995.



- (34) TODD, D. Walking machines: An introduction to legged robotics, Kogan-Page, London, 1985.
- (35) WILLIAMS R. L., II, Carter B. E., P. Gallina and Rosati G., Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots, IEEE Trans. Robot. Automat, vol. 18, pp. 285-293, 2002.
- (36) YANG J. M., CHOI I. H. and KIM J. H., Sliding mode control of a nonholonomic wheeled mobile robot for trajectory tracking, in Proc. of the IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 1998, vol. 4, pp. 2983-2988.