



MODELO MATEMÁTICO PARA UN SISTEMA DE AMORTIGUAMIENTO APLICADO AL TREN DE ATERRIZAJE RETRÁCTIL DE UNA AERONAVE.

MATHEMATICAL MODEL FOR A DAMPING SYSTEM APPLIED TO THE RETRACTABLE LANDING GEAR OF AN AIRCRAFT.

Bolívar C., Jhonny
Universidad Privada Dr. Rafael Belloso Chacín
jbolivarcolon@gmail.com

Ordoñez S., Bárbara A.
Universidad Privada Dr. Rafael Belloso Chacín
baordonez@urbe.edu.ve

RESUMEN

La presente investigación tiene como finalidad desarrollar un Modelado Matemático Para Un Sistema De Amortiguamiento Aplicado Al Tren De Aterrizaje Retráctil De Una Aeronave. La misma estará sustentada teóricamente por autores como Zill, Dennis G. (2007) y Ogata, K. (2010) para la variable de estudio modelo matemático para un sistema amortiguado. La investigación es de tipo descriptiva explicativa, con un diseño no experimental, la población y caso de estudio fue definida por una unidad de análisis la cual se especifica como el sistema de amortiguamiento del tren de aterrizaje de una aeronave Beechcraft Super King air B 200. La metodología a utilizar conto con 4 fases: (1) Explicar los diferentes tipos de sistemas de amortiguamiento utilizados en el tren de aterrizaje de una aeronave de ala fija categoría hélice o jet. (2) Identificar las características generales de las variables de entrada y salida, así como también, los parámetros involucrados en el amortiguamiento del tren de aterrizaje retráctil de una aeronave Beechcraft Super King Air B 200. (3) Establecer el modelo matemático que describa el sistema de suspensión del tren de aterrizaje retráctil de una aeronave Beechcraft Super King Air B 200. (4) Validar el modelo matemático descrito aplicando una prueba de tipo analítica que implique la utilización de un conjunto de relaciones matemáticas y gráficas usando el software Matlab. Se recomienda para un estudio futuro, agregar una fuerza externa $F(t)$ a la ecuación diferencial de movimiento, con lo cual, se crearía un nuevo modelo



matemático que representaría una fenomenología más real y general pero más compleja.

Palabras claves: Modelo matemático, amortiguamiento no lineal, tren de aterrizaje, sistema retráctil, aeronave Beechcraft.

ABSTRACT

The purpose of this research is to develop a Mathematical Modeling for a Damping System Applied to the Retractable Landing Gear of an Aircraft. It will be supported theoretically by authors such as como Zill, Dennis G. (2007) and Ogata, K. (2010) for the mathematical model study variable for a damped system. The research is of a descriptive explanatory type, with a non-experimental design, the population and case study was defined by a unit of analysis which is specified as the landing gear damping system of a Beechcraft Super King air B 200 aircraft. methodology to be used with 4 phases: (1) Explain the different types of damping systems used in the landing gear of a fixed-wing aircraft, propeller or jet category. (2) Identify the general characteristics of the input and output variables, as well as the parameters involved in the damping of the retractable landing gear of a Beechcraft Super King Air B 200 aircraft. (3) Establish the mathematical model that describes the retractable landing gear suspension system of a Beechcraft Super King Air B 200 aircraft. (4) Validate the mathematical model described by applying an analytical type test that involves the use of a set of mathematical and graphic relationships using Matlab software. It is recommended for a future study to add an external force $F(t)$ to the differential equation of motion, which would create a new mathematical model that would represent a more real and general but more complex phenomenology.

Keywords: Mathematical model, nonlinear damping, landing gear, retractable system, Beechcraft aircraft.

INTRODUCCIÓN

Resolver un problema real en el área de la ingeniería o cualquier otra ciencia, generalmente es muy complicado si no se tiene una guía apropiada para comenzar explorar o modelar la situación. Esto se debe entre otras cosas, a que los elementos que en él intervienen son numerosos, por consiguiente, es difícil expresar el problema en forma clara. También influye, que las relaciones entre estos componentes no son tan evidentes, lo que



incrementa aún más las posibilidades de dar una solución apropiada a la realidad del fenómeno tratado.

La naturaleza de un patrón estándar, obedece a los elementos que se elijan para su conformación, pudiendo ser este: una gráfica, una red o expresiones matemáticas. Al presentar de manera calculada las unidades y relaciones que intervienen en un problema, se tienen algunas ventajas: admite la utilización de los instrumentos matemáticos ya desarrollados en la consecución de una solución sistemática, explícita, eficiente, entre otras. Así mismo, permite distintos arreglos factibles y tomar una mejor decisión. También es útil para predecir y comparar el comportamiento de la situación presentada frente a diferentes alternativas o en distintos momentos.

Por otra parte, uno de los campos de la investigación para los que se emplea el uso de los modelos matemáticos en forma sistemática y cada vez más creciente, es en la industria aeronauta por su alto nivel de exigencia y precisión en el proceso de diseño. Una de estas áreas, así como cualquier otra, la conforman los sistemas de suspensión donde el amortiguador es un factor fundamental por su importancia al permitir el despegue y aterrizaje de la aeronave. Las características de estos mecanismos en cuanto a sus dispositivos y formas de articulación, deben establecer un justo acuerdo entre el modelo presentado y la mecánica de la construcción.

El desarrollo de esta investigación permite a través de un prototipo de avión (Beechcraft Superking Air B 200), en particular de su tren de aterrizaje retráctil: explicar, identificar y establecer las bases de un modelo matemático que redimensiona el comportamiento del amortiguamiento para una alta velocidad en el desplazamiento del pistón para el cilindro amortiguador. El modelo presentado, no elimina la posibilidad de la aplicación del patrón a baja velocidad, sino que el aporte teórico – matemático extiende y fortalece los aspectos dinámicos de la fenomenología.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Desarrollar el modelo matemático para un sistema de amortiguamiento aplicado al tren de aterrizaje retráctil de una aeronave.

METODOLOGIA

La investigación que se presenta es de tipo descriptiva porque se caracterizan todas las variables cinemáticas involucradas en el diseño, estructura y conceptualización de un modelo matemático. En este sentido, se utilizan criterios sistemáticos que permiten poner de manifiesto el procedimiento de los hechos en estudio, dando de esta manera, información ajustada y comparable con otros argumentos.



Además la investigación en curso, se basa en lo explicativo porque ya no solo describe el fenómeno observado, sino que se acerca y busca declarar las causas que originaron la situación analizada, lo cual es esencial para la validación de la teoría utilizada. Consecuentemente, intenta expresar las leyes y principios que generan el modelo que representa la situación planteada.

En el entorno de una investigación científica a nivel explicativo, se dan dos elementos: el primero habla sobre la explicación misma, que no es más que el objeto, hecho o fenómeno en su definición, tomando en cuenta, que es el problema quien genera la pregunta que requiere una explicación. En segunda instancia, se aborda lo deducido de la interpretación (a modo de una secuencia hipotética deductiva), tomado de un conjunto de premisas compuestas por leyes, generalizaciones y otros enunciados que expresan regularidades que tienen que acontecer. En tal sentido, la explicación es siempre una deducción de una teoría que contiene afirmaciones que expresan hechos particulares.

Según Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2017) "el estudio busca el porqué de los hechos, estableciendo relaciones de causa – efecto" basándose en la técnica de estudio que se emplea, ya que el diseño, los datos que se recolectan, la manera de obtenerlos, el muestreo y otros componentes de la investigación son distintos. Lo que diferencia cada aporte de lo constituido, es poder dar una respuesta teórica basada en un estudio o análisis que permitirá identificar los mejores parámetros del modelo.

Siguiendo el mismo orden de ideas, se precisa que esta investigación es de diseño no experimental. Según Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2017) "diseños no experimentales de investigación se realizan sin manipular variables de manera intencional, donde se observa el fenómeno tal como se presenta en su contexto natural para después analizarlo; siendo este más cercano a la realidad estudiada y posee un control menos riguroso que el experimental".

Por tal motivo, en esta investigación todas las variables de estudio estarán bien definidas y la obtención de sus valores serán recurrentes al modelo de estudio, con una observación teórica basada en una simulación que, luego se analiza para dar resultados que se acerquen a la realidad de los hechos fomentados.

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Modelo Matemático que describe el Sistema de amortiguación del Tren de Aterrizaje Retráctil de una aeronave.

La validación de un modelo matemático, según Doucet y Sloep (1992), se puede definir como la demostración de su exactitud para una aplicación



concreta. En este sentido, la exactitud es la ausencia de error sistemático y aleatorio: en ciertas áreas de la ciencia como la matemática, física o la misma ingeniería, se conocen habitualmente como fidelidad y precisión respectivamente. Todos los modelos son, por su propia naturaleza, representaciones incompletas del sistema del que pretenden ser modelo, pero a pesar de esta limitación pueden ser útiles.

Para establecer las bases de esta fase, se plantea la modelación matemática no como un simple algoritmo elemental, Arcos (2000), sino como un centro de interés inteligible que permita establecer importantes relaciones entre situaciones contextuales. Así como también, la formación de mecanismos necesarias para el uso del método de diseño en ingeniería con un desarrollo del pensamiento matemático y el pensamiento estratégico, Cruz (2006), que deben estar presentes en la construcción de experiencias de la investigación dirigidas a la formación de modelos eficientes.

Para efectos de esta investigación, la modelación matemática se entiende como un proceso científico en el cual se dispone de:

- Una situación – problema dada en un contexto, generalmente de realizaciones prácticas, en la cual se requiere obtener una meta, respuesta o decisión acerca de cómo se deberá proceder o cómo se deberá usar un recurso para obtener el mejor resultado entre una variedad de ellos.
- La formulación de la situación – problema del mundo real en términos matemáticos, generalmente a través de ecuaciones o relaciones entre variables que describen la situación dada (esto es, la construcción del modelo matemático en sí).
- La solución y análisis del problema matemático obtenido.
- La interpretación de los resultados matemáticos vistos en el contexto de la situación real original (por ejemplo, verificar si ella se corresponde con la pregunta originalmente propuesta o implícita en la situación-problema original).

Con este argumento, se proyecta una generalización del modelo matemático para el oscilador amortiguado cuya proporcionalidad está en función de la velocidad relativa del cuerpo en movimiento oscilante. En este sentido, en una primera instancia el modelo puede describir el fenómeno haciendo uso de ecuaciones diferenciales lineales con la aplicación de las leyes de Newton. El patrón matemático seguido en esta parte de la modelación, solo es compatible con un régimen de velocidades bajas del sistema de amortiguación.

Sin embargo, al modificarse las condiciones del sistema en torno al régimen de la rapidez del fluido (estado de turbulencia), el nuevo modelo propuesto en esta investigación, resuelve la situación planteada usando ecuaciones diferenciales no lineales, así como también, se proponen una

serie de procedimientos algebraicos que le dan sustento a la guía exhibida durante su desarrollo. La figura 1, ilustra esquemáticamente la situación referida.

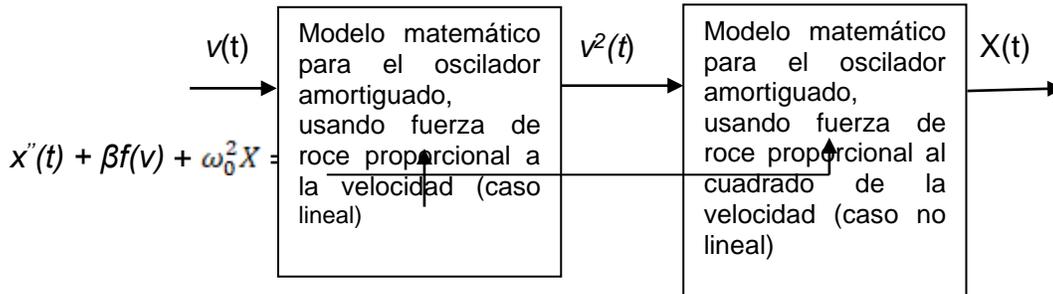


Figura 1. Diagrama esquemático de la generalización del modelo matemático para el oscilador amortiguado proporcional a la velocidad.

Fuente: Elaboración Propia (2018)

Donde: $x''(t) + \beta f(v) + \omega_0^2 X = 0$; es la ecuación diferencial que describe el desplazamiento del sistema amortiguado la cual puede ser lineal o no lineal.

$f(v)$, fuerza de roce proporcional a la velocidad $v(t)$ en su orden uno (1) ó dos (2).

β , constante de viscosidad.

ω_0 , frecuencia natural de oscilación de magnitud constante.

$X(t)$, desplazamiento de la masa oscilante

Modelo Matemático Para el Oscilador Amortiguado con Fuerza de Roce Proporcional a la Velocidad en su primer y segundo orden.

En la mecánica clásica, el estudio del oscilador amortiguado reviste gran importancia, por cuanto, sus aplicaciones son diversas en cualquier área de la ingeniería. Una consecuencia de ello, está en desarrollar el modelo matemático apropiado que simplifique, no solo el diseño más apropiado para la construcción, sino que también facilite, una mejor comprensión y análisis de los componentes teóricos de funcionamiento en cualquier mecanismo fabricado.

En este sentido, el tratamiento de esta tercera fase donde se establece el modelo teórico que describe la dinámica para el oscilador amortiguado, se mostrará el procedimiento matemático para el caso donde la fuerza de roce es proporcional a la velocidad, y luego como un aporte complementario para la generalización en la solución del problema, el desarrollo cuando la fuerza de roce actuante es proporcional al cuadrado de



la velocidad. La conjunción de ambas representaciones, en suma forman una generalidad que conduce a la descripción completa de los fenómenos, en una primera y segunda aproximación.

- **Desarrollo del modelo matemático cuando la fuerza de roce es proporcional a la velocidad.**

La particularidad de este caso, se presenta cuando el fluido es muy viscoso y la velocidad del objeto es pequeña, entonces puede hacerse la aproximación de que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad:

$$\vec{f} = -\gamma \vec{v}$$

siendo γ , una constante empírica que depende de la forma y tamaño del objeto y de las propiedades del fluido. Se mide en $\text{N}/(\text{m/s}) = \text{kg/s}$. Aquí \vec{v} es siempre la velocidad relativa al líquido o gas donde oscila el elemento amortiguador. Si este se encuentra en movimiento respecto a un sistema fijo con velocidad \vec{u} habrá que calcular $\vec{v} = \vec{v}_{obj} - \vec{u}$. Esta fórmula, aunque es muy usada por su simplicidad matemática, posee aplicación limitada, ya que vale para partículas que se mueven lentamente en agua o aceite, pero no es aplicable a cuerpos que se mueven a mayor velocidad, como un barco, o para medios poco densos o viscosos, como el aire.

Para efectos y simplicidad de los cálculos, el movimiento está restringido a solo un grado de libertad sobre la variable x , haciendo la velocidad $u = 0$, para el sistema de referencia considerado. Bajo estas condiciones, se aplica el conjunto de fuerzas descritas por la segunda ley de Newton, que intervienen en una oscilación amortiguada proporcional a la velocidad sobre el cuerpo en desplazamiento.

$$m\ddot{x} = \sum F(x, \dot{x}, t), \quad \text{segunda ley de Newton}$$

Reemplazando, la suma del conjunto de fuerzas que intervienen en este amortiguamiento, se tiene

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad (1)$$

Donde, $-c\dot{x}$ es la fuerza de rozamiento viscoso (lineal), que consume la energía mecánica del cuerpo en estado de oscilación y, $-kx$ la fuerza restauradora del resorte amortiguador. Todas ellas contrarias a la velocidad y desplazamiento de la masa oscilante, respectivamente. Asimismo, la ecuación diferencial resultante para este movimiento, se escribe.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{ó} \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

Aquí c , es una constante de proporcionalidad entre la fuerza de roce y la velocidad, la cual está vinculada a la constante de viscosidad a través de la relación $c = m\gamma$. También se observa en la relación, el parámetro constante ω_0 , conocido como la frecuencia angular de oscilación. Las ecuaciones diferenciales descritas para el estado de movimiento, se pueden escribir por un cambio de notación comúnmente usado, como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

Esta relación es conocida como, ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes, cuya solución particular viene dada por una función exponencial de la forma:

$$x(t) = Ae^{\beta t} \quad (4)$$

El *valor* A es una constante de integración, la cual está determinada por las condiciones iniciales del sistema y, el coeficiente de la exponencial se asocia a valores menores que cero de modulo negativo. Ahora bien, sustituyendo la solución particular (4), en la ecuación diferencial (3), se obtiene la ecuación característica del sistema, la cual está dada por:

$$Ae^{\beta t}(\beta^2 + \gamma\beta + \omega_0^2) = 0$$

De estos resultados, para que la exponencial sea una solución, β no puede tener cualquier valor, sino que la ecuación de segundo grado en β se debe cumplir

$$(\beta^2 + \gamma\beta + \omega_0^2) = 0$$

Al resolver, se obtiene

$$\beta = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

De donde se derivan dos raíces definidas como,

$$\beta_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad \text{y} \quad \beta_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

La solución general de la ecuación diferencial de movimiento será una combinación lineal de dos soluciones exponenciales, una por cada resultado, esto es:

$$x(t) = A_1 e^{\beta_1 t} + A_2 e^{\beta_2 t} \quad (5)$$

Facilmente se observa que, los coeficientes generan tres posibles estados de trayectoria en el movimiento amortiguado dependiendo de β , es

decir, el argumento de la raíz cuadrada solo tiene la oportunidad de formar tres casos diferentes, que a continuación se mencionan:

- Si $\gamma > 2\omega_0$, las dos soluciones son reales y diferente (caso sobreamortiguado).
- Si $\gamma = 2\omega_0$, existe una solución real doble (amortiguamiento crítico).
- Si $\gamma < 2\omega_0$, las dos soluciones son complejas conjugadas (caso subamortiguado).

Las características cinemáticas dadas en su forma representativa para este modelo, se pueden observar en la figura 2 donde se ha señalado que, la modelación matemática de un amortiguador de líquido - resorte se logra representar usando como patrón las ecuaciones diferenciales lineales. Por cuanto, existe una relación que vincula directamente la constante de amortiguación γ con la frecuencia natural ω_0 de oscilación del sistema. En virtud de ello, el movimiento depende fuertemente de las condiciones iniciales, el valor de γ y ω_0 .

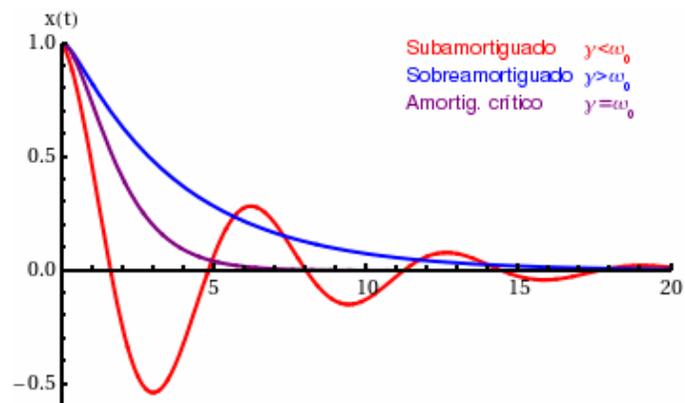


Figura 2. Dependencia de $x(\text{cm})$ en función de $t(\text{s})$ para el sistema amortiguado considerando tres trayectorias diferentes de acuerdo a la relación entre γ y ω_0 .

Fuente: Elaboración Propia (2018)

En consecuencia, el enfoque del amortiguamiento de un cuerpo en un fluido viscoso usando una relación directa entre la fuerza de roce y la velocidad, no está mal planteado o descrito por ecuaciones diferenciales lineales según los resultados obtenidos, sino que lo limita en el aspecto fenomenológico, por cuanto, existen situaciones que este no contempla. Por ejemplo, como es el caso ya mencionado de la fuerza de roce en proporción directa con el cuadrado de la velocidad. Situación esta que se plantea a continuación, en el desarrollo de un modelo que se establece como un aporte que generaliza la respuesta del sistema.



Modelo Matemático Para el Oscilador Amortiguado con Fuerza de Roce Proporcional al Cuadrado de la Velocidad.

Para un objeto que se mueve en aire a una velocidad alta (pero no próximo a la barrera del sonido o supersónica) puede ser una mejor aproximación una ley cuadrática con la velocidad (ley de Rayleigh). En este caso, el módulo de la fuerza es proporcional al cuadrado de la rapidez, su dirección es la misma que la de la velocidad, y su sentido es el opuesto al de éste. Este mismo fundamento, se emplea para un cuerpo en movimiento de amortiguación, dado que la respuesta encontrada en algunos escenarios, no traduce el modelo matemático esperado cuando se emplea un basamento diferente.

El argumento anterior se refiere al hecho, de incorporar objetivamente una realidad por otra que ya no satisface los resultados esperados en una teoría. En tal sentido, el modelo matemático para el oscilador amortiguado con fuerza de roce proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo, es integrado a esta investigación como un aporte que agrega un evento adicional al problema del amortiguamiento. Por ello, a continuación se desarrolla en forma detallada la evidencia matemática que soporta el basamento del amortiguamiento para fuerzas de rozamiento viscoso en proporción cuadrática de la rapidez del cuerpo.

La dinámica de la partícula desde un punto de vista conceptual o teórico, comprende el estudio de cuerpos que, bajo la acción de fuerzas aplicadas son capaces de experimentar transformaciones en su estado de equilibrio. Este estudio está basado principalmente en las tres leyes de movimiento de Newton. En este sentido, particularmente la segunda ley establece que,

$$m\ddot{q} = \sum_j F_j(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \quad (1.1)$$

De la relación (1.1), q establece la coordenada generalizada del desplazamiento, F_j las fuerzas que actúan sobre el sistema, m la masa del cuerpo y t el tiempo de duración del fenómeno. Por otra parte, de la segunda ley de Newton puede deducirse que el efecto de una fuerza aplicada sobre un conjunto de partículas, es independiente del efecto de cualquier otra fuerza que pueda actuar también sobre el sistema y, asimismo, independiente de cualquier movimiento que pueda haber tenido la partícula antes de que la fuerza empezara a actuar.

Para una partícula que se mueve en un fluido viscoso con una rapidez alta (pero no próxima a la barrera del sonido), puede ser una mejor aproximación la ley cuadrática con la velocidad (ley de Rayleigh). En este caso, $|\vec{f}_v| = c|\vec{v}|^2$, si y solo si $\vec{f}_v \parallel \vec{v}$, y también $\vec{f}_v \cdot \vec{v} < 0$, entonces estas tres

propiedades se pueden reunir en la expresión vectorial, como: $\vec{f}_v = c|\vec{v}|\vec{v}$ donde c es una constante de proporcionalidad entre la fuerza que experimenta la partícula sumergida en el fluido y el cuadrado de su rapidez.

Si se emplea la ecuación de movimiento (1.1) de la segunda ley de Newton y se asumen las fuerzas correspondientes al movimiento armónico amortiguado con fuerza de roce viscoso proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula, se tiene que la expresión resultante es,

$$ma = -f - F$$

y la ecuación diferencial de movimiento, para un grado de libertad en la dirección de x :

$$m\ddot{x} + c|\dot{x}|\dot{x} + kx = 0 \quad (1.2)$$

siendo, $f_v = -c|\dot{x}|\dot{x}$, la fuerza con la cual el fluido amortigua la partícula y, $F = -kx$, la fuerza restauradora para un sistema masa – resorte. Al sustituir en la ec. (1.2) la definición operacional de rapidez, $\dot{x} = v = \frac{dx}{dt}$, se tiene

$$m \frac{dv}{dt} + c|v|v + kx = 0 \quad (1.3)$$

De esta ecuación se puede observar que, el término de la fuerza amortiguada dado por el producto del valor absoluto de la velocidad y el vector de la velocidad misma, garantizan que el desplazamiento, pueda eventualmente oscilar para tomar valores positivos y negativos alrededor del punto de equilibrio.

Definiendo $\gamma = c/m$, como la constante de amortiguamiento viscoso y, ω_0 llamándola frecuencia natural de un oscilador cuya constante elástica es k , entonces la ec. (1.3), toma la forma

$$\frac{dv}{dt} + \gamma|v|v + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.4)$$

Una manera de resolver la ecuación diferencial (1.4), es a través del uso de la función escalón de Heaviside o función escalón unitario, definida particularmente de la siguiente manera:

$$\forall z \in \mathbb{R}: \bar{u}(z) = H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{z}, & z = 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$$

Con el propósito de hacer uso práctico en la convencionalidad de la función escalón unitario, y ajustándola a los requerimientos del valor absoluto de la velocidad en la ecuación diferencial (1.4), $H(z)$ es redefinida en términos de la velocidad e intervalo para el dominio de v , como sigue:

$$\bar{u}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}v > 0 \\ 0, v = 0 \\ -\frac{1}{2}v < 0 \end{cases}$$

(1.5)

De este modo, $f_v = \gamma|v|v$ también se representa como $f_v = 2\bar{u}(v)\gamma v^2$. Haciendo uso de esta última expresión en la ec. (1.4), se obtiene

$$\dot{v} + 2\bar{u}(v)\gamma v^2 + \omega_0^2 x = 0; \quad \text{Con } \dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad (1.6)$$

Haciendo uso práctico de $\bar{u} = \frac{1}{2}$ para $x > 0$, se logra

$$\dot{v} + \gamma v^2 + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.7)$$

La solución general de la ec. (1.7), se adquiere a través de la suma de dos soluciones: $v(t) = v_2(t) + v_1(t) = \frac{1}{z(t)} + v_1(t)$, donde $v_2(t)$ se establece como la solución homogénea y $v_1(t)$ la particular, en cuyo caso es conocida. Ahora bien, sustituyendo $v(t)$ como el conjunto de dos contribuciones en la ec. (1.7), y desarrollando, se asume un sistema de ecuaciones diferenciales, formado por:

$$\dot{v}_1 + \gamma v_1^2 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad \text{y} \quad \dot{z} - 2\gamma v_1 z = \gamma \quad (1.8)$$

siendo v_1 y x_1 , soluciones particulares del sistema propuesto. En este caso, estas están dadas por: $v_1 = -\frac{\omega_0^2 t}{2\gamma}$ y $x_1 = \frac{1}{2\gamma} - \frac{\omega_0^2 t^2}{4\gamma}$

Se puede comprobar que, este conjunto particular $(v_1 - x_1)$, satisfacen al grupo de ecuaciones diferenciales (1.8). En este sentido, para encontrar la solución homogénea, sencillamente se sustituye v_1 en $\dot{z} - 2\gamma v_1 z = \gamma$, con lo cual

$$\dot{z} + \omega_0^2 t z = \gamma \quad (1.9)$$

Este resultado que es de tipo diferencial de primer orden y no homogénea, es una particularidad de la ecuación diferencial de Ricatti, cuya solución se obtiene mediante la determinación del factor integrante η que conduce de manera inmediata al término de la ecuación. Específicamente en este caso,

$$\eta = e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}} \quad \text{conduce a} \quad \dot{z} e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}} + \omega_0^2 t z = \gamma e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}} \quad (1.10)$$

De tal manera, que la expresión anterior se consigue arreglar de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(z e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}} \right) = \gamma e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}}$$

De la integración se obtiene $z(t)$, como

$$z(t) = \gamma e^{\frac{-\omega_0^2 t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{\omega_0^2 y^2}{2}} dy \quad (1.11)$$

Determinada $z(t)$ en un carácter implícito, entonces se hace necesario sustituir las funciones exponenciales, cuyo argumento depende de t^2 , por sus respectivas series de Taylor. La razón de este cambio, está en el hecho de que la integral que aparece en la definición de $z(t)$ no tiene primitiva, y en consecuencia, una solución en términos de la exponencial no es viable. Así, se muestran las relaciones

$$e^{\frac{-\omega_0^2 t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{n!} \quad \text{y} \quad \int_0^t e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}} dt = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{2^n n!} dt$$

Al sustituir los términos anteriores en (1.11), se adquiere una función $z(t)$, definida por un producto que implica operar sobre dos desarrollos en serie de Taylor

$$z(t) = \gamma e^{\frac{-\omega_0^2 t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}} dt = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{n!} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{2^n n!} dt$$

$$z(t) = \gamma e^{\frac{-\omega_0^2 t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{\omega_0^2 t^2}{2}} dt = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{n!} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{2^n n!} dt \quad (1.12)$$

Resolviendo la integral (1.12) y, evaluándola entre 0 y t , $z(t)$ arroja la solución

$$z(t) = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{(2n+1)n!} \quad (1.13)$$

Con la deducción realizada, la solución general para la ecuación diferencial (1.9), está dada por

$$v(t) = \frac{1}{\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{(2n+1)n!}} - \frac{\omega_0^2}{2\gamma} t \quad (1.14)$$

Al emplear las condiciones iniciales para el sistema tratado, se desprende que para $t = 0s$, $v_2(t)$ tiende a infinito, lo que no corresponde con la realidad física de un movimiento amortiguado. Sin embargo, $v_1(t)$ que depende linealmente del tiempo es cero; condición que ubica a la partícula en la posición inicial $x = 0m$. Con este razonamiento, se descarta la posibilidad de que $v_2(t)$ forme parte de la solución física del sistema amortiguado. De acuerdo a lo analizado, se tiene que

$$v(t) = v_1 = -\frac{\omega_o^2 t}{2\gamma} \quad (1.15)$$

Derivando sobre la ec. (1.15), se obtiene la aceleración del sistema e integrando la misma, la posición de la partícula en cualquier instante t . El cuadro 1, muestra la caracterización paramétrica de las variables cinemáticas del sistema. Así mismo, se presenta la importancia de la función unidad escalón como un elemento de apoyo en la interpretación del fenómeno físico a través del modelo matemático.

Cuadro 1
Caracterización de las variables cinemática del sistema
amortiguado con fuerza de roce proporcional a v^2 .

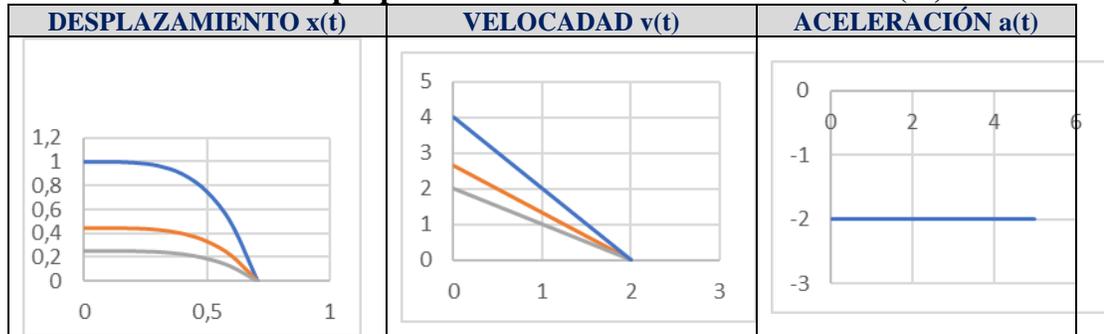
Posición $x(t)$.	Velocidad $v(t)$	Aceleración $a(t)$
$x(t) = \frac{\bar{u}}{\gamma}(1 - \gamma\omega_o^2 A_o t^2)$	$v(t) = -2\bar{u}\omega_o^2 A_o t$	$a = -2\bar{u}\omega_o^2 A_o = -\frac{\bar{u}\omega_o^2}{\gamma} = cte,$

Fuente: Elaboración propia (2018)

Donde $A_o = \frac{1}{2}\gamma$, es una constante que resulta de la integración de $v(t)$, representando ésta el máximo desplazamiento realizado por la partícula desde su posición inicial hasta su estado de equilibrio en x_o . Se advierte al observar las ecuaciones que, estas corresponden a un movimiento desacelerado, en cuyo caso, los cambios de velocidad son constantes. La interpretación de este resultado indica que, para un sistema con amortiguamiento proporcional al cuadrado de la velocidad, la partícula no oscila, sino que es impulsada violentamente desde su posición inicial hasta la posición de equilibrio donde finaliza su movimiento.

Por otra parte, el cuadro 2 indica el comportamiento gráfico de las variable cinemáticas del desplazamiento, velocidad y aceleración del cuerpo de masa m en función del tiempo, verificándose de esta manera, su condición de amortiguamiento (aunque no oscilante), al comprobarse una desaceleración en el sistema. Cabe mencionar que, las ecuaciones han sido graficadas con la finalidad de mostrar tres situaciones distintas para la constante de amortiguamiento γ .

Cuadro 2
Graficas de las variables cinemáticas del movimiento amortiguado con fuerza de roce proporcional al cuadrado de la velocidad (v^2).



Fuente: Elaboración propia (2018)

- **Comportamiento de la velocidad (v) en Función de la posición (x).**

De la definición operacional $v = \frac{dx}{dt}$, el operador $\frac{d^2x}{dt^2}$ se reescribir según un arreglo, como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} \quad (2.1)$$

al reemplazar este resultado en la ec. (1.6), se obtiene

$$\frac{dv^2}{dx} + 4\bar{u}(v)\gamma v^2 + 2\omega_o^2 x = 0 \quad (2.2)$$

Con el cambio $y = v^2$, la ec. (2.2), se transforma en

$$\frac{dy}{dx} + 4\bar{u}(y)\gamma y + 2\omega_o^2 x = 0 \quad (2.3)$$

Para resolver la ec. (2.3) se plantea una solución general: $y = y_h + y_p$. Donde y_h es una solución homogénea y y_p la solución particular. Con la sustitución se obtiene

$$\frac{dy_p}{dx} + 4\bar{u}\gamma y_p + 2\omega_o^2 x_p + \frac{dy_h}{dx} + 4\bar{u}\gamma y_h = 0 \quad (2.4)$$

Para y_p se cumple, $\frac{dy_p}{dx} + 4\bar{u}\gamma y_p + \omega_o^2 x_p = 0$. Por lo tanto, de la ec. (2.4), se reduce a:

$$\frac{dy_h}{dx} + 4\bar{u}\gamma y_h = 0 \quad (2.5)$$

que conduce a la solución homogénea de la ecuación (2.3), que en este caso es:

$$y_h = Be^{-4\bar{u}\gamma x} \quad \text{ó} \quad (v_h)^2 = Be^{-4\bar{u}\gamma x} \quad (2.6)$$

Del resultado, B es la constante de integración determinada por las condiciones iniciales. Condición que se verifica cuando: $t = 0s$, y $v_0 = v(t = 0s) = 0m/s$. Asimismo, $x(t = 0s) = A_0 = 1/2\gamma$. Al probar estas condiciones en la solución homogénea (2.6), se demuestra que $B = 0$, con lo que, la solución general de la ec. (2.3), solo es una contribución de la solución particular, por esta razón

$$y(x) = y_p = \frac{\omega_o^2}{2\gamma^2}(1 - 4\bar{u}\gamma x) \quad (2.7)$$

quedando después del cambio de variable, como

$$v^2(x) = \frac{\omega_o^2}{2\gamma^2}(1 - 4\bar{u}\gamma x) \quad \text{ó} \quad v(x) = \frac{\sqrt{2}\omega_o}{2\gamma} \sqrt{1 - 4\bar{u}\gamma x} \quad (2.8)$$

Este resultado (2.8) es consistente con lo que se considera un fenómeno amortiguado, dado que en la solución se observa, un comportamiento de la velocidad que decae en la medida que la partícula se acerca rápidamente a la posición de equilibrio x_0 una vez que sale de su posición inicial. Reorganizando convenientemente la ec. (2.8), en su forma cuadrática, se tiene que,

$$v^2(x) = \frac{\omega_o^2}{2\gamma^2} - \frac{2\bar{u}\omega_o^2}{\gamma} x$$

(2.9) Se advierte de la relación (2.9) que, $v_o^2 = \frac{\omega_o^2}{2\gamma^2}$ y $a = -\frac{\bar{u}\omega_o^2}{\gamma}$, como se había determinado antes (ver cuadro 9). De esta forma, $v^2(x)$ se reescribe

$$v^2(x) = v_o^2 - 2ax \quad (2.10)$$

y

$$v(x) = v_o \sqrt{1 - 2\gamma x}, \quad \text{con } v_o = \frac{\sqrt{2}\omega_o}{2\gamma} \quad (2.11)$$

De (2.11), se desprenden tres resultados implícitos en el discriminante de la solución. Estos son:

Caso I. $1 - 2\gamma x < 0$; lo que arroja como resultado, $x > \frac{1}{2\gamma}$.

Aquí, $v(x)$ toma valores complejos, lo que implica que, en el intervalo $[1/2\gamma, +\infty)$ no existe ninguna x que genere una solución física.

Caso II $1 - 2\gamma x = 0$; Donde, se tiene que, $x = \frac{1}{2\gamma}$.

Solución físicamente admitida, puesto que, representa el máximo valor alcanzado por el desplazamiento de la partícula (A_0).

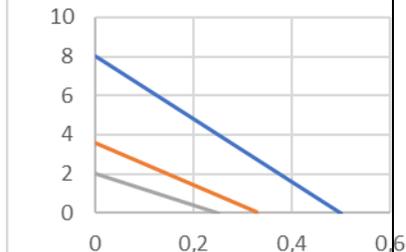
Caso III. $1 - 2\gamma x > 0$; lo que arroja como resultado, $x < \frac{1}{2\gamma}$.

En esta situación el discriminante $1 - 2\gamma x > 0$, indica que el factor $2\gamma x$ solo puede tomar valores en el intervalo $0 < 2\gamma x < 1$, definiendo al

desplazamiento entre $x = 0\text{m}$ y $x = 1/2\gamma$. Esta condición reafirma que, la partícula amortiguada solo se desplaza físicamente la longitud A_0 , en un tiempo determinado t . En este contexto, el cuadro 3 destaca la evolución gráfica del cuadrado de la velocidad del amortiguador (v^2) en función de su desplazamiento x . Para la construcción de la grafica, se han tomado tres valores apropiados de la constante γ .

Cuadro 3

Cuadrado de la velocidad (v^2) en función del desplazamiento x , acompañada de la representativa ecuación diferencial.

Ecuación Cuadrado de la velocidad	Cuadrado de la velocidad (v^2)
$V^2(x) = v_0^2 - 2ax$	

Fuente: Elaboración propia (2018)

- **Energía Mecánica Amortiguada en función del Tiempo $E = E(t)$.**

Para un sistema aislado donde actúan tanto fuerzas conservativas como no conservativas se puede comprobar que, la variación de la energía mecánica es igual al trabajo realizado sobre el mismo por las fuerzas no conservativas.

$$\Delta E_m = W_{nc} \quad (3.1)$$

pero la variación respecto al tiempo de la energía mecánica se define como la potencia disipada (P_{nc}) por el sistema no conservativo.

$$\frac{d}{dt} E_m = P_{nc} \quad \text{Siendo} \quad P_{nc} \neq 0 \quad (3.2)$$

La energía mecánica E_m , no es una constante en el tiempo, sino que decae en la medida en que t aumenta. Para un sistema no conservativo:

$$P_{nc} = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}$$

Estando $f_{nc} = -cv^2$. Al sustituir esta relación en P_{nc} , se obtiene

$$P_{nc} = -cv^3 \quad (3.3)$$

Puesto que, el segundo miembro es negativo se deduce que E_m se va disipando progresivamente en el tiempo. El consumo de energía será mayor cuando lo es la rapidez de movimiento.

Ahora se introduce $v(t)$ en P_{nc} , y el resultado en la ec. (3.2), para conseguir

$$\frac{d}{dt} E_m = -c \frac{\bar{u}^3 \omega_o^6 t^3}{\gamma^3} \quad (3.4)$$

La integración arroja
$$E_m = -c \frac{\bar{u}^3 \omega_o^6 t^4}{4\gamma^3} + E_{om} \quad (3.5)$$

La constante de integración E_{om} representa la energía mecánica para $t = 0s$ (en su condición inicial del sistema). Ahora bien, haciendo $c = m \cdot \gamma$ y $\bar{u} = 1/2$, se tiene

$$E_m = E_{om} - \frac{m\omega_o^6 t^4}{32\gamma^2} \quad \text{ó} \quad E_m(t) = \frac{m\omega_o^2}{8\gamma^2} \left(1 - \frac{\omega_o^4 t^4}{4} \right) \quad (3.6)$$

Correspondiendo $E_{om} = \frac{m\omega_o^2}{8\gamma^2}$, a la energía mecánica inicial del sistema.

$E_m(t)$, representa la energía mecánica en función del tiempo del amortiguador que inicia un movimiento sujeto a una fuerza restauradora $F = -kx$, y cuya energía se disipa en términos de una fuerza amortiguada $f_v = -cv^2$.

De los resultados obtenidos se confirma que, para un sistema amortiguado con las características cinemáticas estudiadas, la energía mecánica decae violentamente en términos del tiempo elevado a la cuarta potencia (t^4), es decir, una vez que comienza el movimiento, este se atenúa de una manera extremadamente rápida comparada con el caso laminar. De donde se deduce que, la partícula no realiza ninguna oscilación en torno al punto de equilibrio x_0 , sino que desacelera abruptamente hasta llegar a su posición final.

Por otra parte, el tiempo τ necesario para que se disipe toda la energía del sistema, se puede hallar haciendo $E_m(0) = 0$, entonces

$$\frac{m\omega_o^2}{8\gamma^2} \left(1 - \frac{\omega_o^4 \tau^4}{4} \right) = 0, \text{ donde } \tau = \frac{\sqrt{2}}{\omega_o} \quad (3.7)$$

También, E_m en términos de τ se expresa:

$$E_m(t) = E_{om} \left[1 - \left(\frac{t}{\tau} \right)^4 \right] \quad (3.8)$$

- **Energía Mecánica Amortiguada en función de la Posición**

$$E_m = E_m(x)$$

Partiendo de la ec. (2.2), donde

$$\frac{dv^2}{dx} + 4\bar{u}(v)\gamma^2 + \omega_o^2 x = 0 \quad (4.1)$$

y multiplicándola por el término $1/2m$, esta se puede expresar de la forma

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + m \omega_o^2 x = -2 \bar{u} m \gamma v^2 \quad (4.2)$$

Arreglando particularmente se tiene,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega_o^2 x^2 \right) = -2 \bar{u} m \gamma v^2 \quad (4.3)$$

Haciendo uso del enunciado: $E_m = E_{cinetica} + E_{potencial} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$, se concreta la relación

$$\frac{dE_m}{dx} = -2 \bar{u} m \gamma v^2 \quad (4.5)$$

integrando, se consigue

$$E_m = -2 \bar{u} m \gamma \int v^2 dx = 2 \bar{u} m \gamma \int v^2 dx \quad (4.6)$$

Usando la relación conocida para $v^2(x)$ y reemplazándola en (4.6), se obtiene

$$E_m = \frac{m \omega_o^2}{2 \gamma} \int_0^x (1 - 2 \gamma x) dx = \frac{m \omega_o^2}{2 \gamma} x \Big|_0^x - \frac{m \omega_o^2}{2} x^2 \Big|_0^x \quad (4.7)$$

al evaluar (4.7), se transforma en

$$E_m = \frac{m \omega_o^2}{2 \gamma} x - \frac{m \omega_o^2}{2} x^2 \quad (4.8)$$

Lo que conduce completando cuadrados a

$$E_m = -\frac{m \omega_o^2}{8 \gamma^2} \left[4 \gamma^2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.9)$$

Finalmente, haciendo uso de ciertos arreglos algebraicos y sustituyendo

$E_{om} = \frac{m \omega_o^2}{8 \gamma^2}$, se adquiere

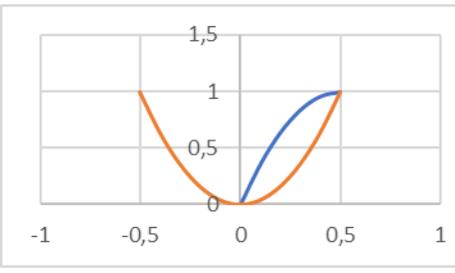
$$E_m = E_{om} \left[1 - (2 \gamma x - 1)^2 \right] \quad (4.10)$$

Lo que pertenece a la relación cinemática entre la energía mecánica del sistema y su dependencia con la posición de la masa amortiguada.

Cuando la partícula está en su posición inicial $x = 1/2\gamma$ (máxima estiramiento), entonces $E_m = E_{om}$, lo cual indica que la partícula tiene su valor más alto de energía mecánica en ese punto. Mientras que, cuando la masa amortiguada llega al punto de equilibrio $x = x_0 = 0m$, en este caso, $E_m = 0J$, lo que concierne a una energía mecánica nula (posición en la que ha consumido toda su capacidad de movimiento). El cuadro 4, muestra este comportamiento a través de la grafica de la energía mecánica en función del desplazamiento x , así como también su ecuación representativa.

Cuadro 4

**Relación entre la energía mecánica E_m y el desplazamiento x ,
junto a la relación matemática que los vincula.**

Ecuación de relación $E_m = E_m(x)$	Energía mecánica en función del desplazamiento
$E_m = E_{0m}[1 - (2\gamma x - 1)^2]$	

Fuente: Elaboración propia (2018)

CONCLUSIONES

Se logra discernir dada la expresión presentada para la energía mecánica en función del desplazamiento X que, el decaimiento de la capacidad de movimiento para una masa en estado de amortiguación que está descrita por una función cuadrática, tiende muy rápidamente a cero. Lo que significa una disminución notable con respecto a la capacidad con la que se conserva una oscilación armónica (curva de color rojo en el cuadro anterior), y más aun, si le compa con la energía disipara del caso lineal.

Se introduce el uso de la función escalón u^- , en el desarrollo operacional de las ecuaciones, como una alternativa viable para la representación cinemáticas del sistema amortiguado. En este sentido la función u^- , no solamente evita el abordaje del problema numérico, sino que también, define el conjunto de soluciones para $u^- = \square(1/2)$, en la realidad de los sistemas fuertemente amortiguados.

El hecho, de que la expresión para la fuerza viscosa $f_v = -2u^- \gamma v^2$, genere soluciones compuestas por la incorporación de la función escalón, permite visualizar de los resultados la ausencia de soluciones periódicas, lo que revela físicamente el estado de una partícula que no oscila, sino que experimente un movimiento de desaceleración constante en un tiempo bien definido. Dicho tiempo, depende inversamente de la raíz cuadrada de la constante de elasticidad del resorte. Si la constante elástica es grande, entonces a la partícula le tomará menos tiempo en realizar el recorrido desde su posición inicial hasta la posición de equilibrio. Sin embargo, si la constante elástica es pequeña, el mismo recorrido lo hará en un tiempo mayor.



Sobre la acción elástica cilindro – pistón ajustada a este sistema se advierte que, la fuerza por unidad de longitud varia en forma de una función racional que aumenta según la presión del gas en la cámara. Este resultado, viene a validar en forma concreta el modelo matemático del sistema amortiguado proporcional al cuadrado de la velocidad, puesto que, demuestra la variabilidad de la fuerza por efecto del desplazamiento, aunque la aceleración y la misma fuerza de compresión se mantienen constantes durante el recorrido.

De los resultados obtenidos en cuanto a la acción elástica cilindro – resorte para ambos patrones matemáticos se argumenta que, el modelo no lineal en su descripción del fenómeno no invalida al otro donde el conjunto de ecuaciones diferenciales deriva en soluciones lineales, sino que, la realidad dinámica de los sistemas amortiguados que comprenden bajas y altas velocidades se explican a través de modelos diferentes, lo que implica en este caso, la aplicación de una ley física única pero desarrollos matemáticos diferentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2017) Metodología de la Investigación. sexta edición por McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. ISBN: 978-1-4562-2396-0
- Ogata, K. (2010). INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA, tercera edición en español publicada por: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Zill, Dennis (2009). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado Novena edición. Publicado en inglés por Brooks & Cole /Cengage Learning ISBN-13: 978-0-495-10824-5 ISBN-10: 0-495-10824-3.