

NOCIONES DE LA TEORÍA MATEMÁTICA REALISTA. EJEMPLO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Recepción: 08/05/2013 Revisión: 09/07/2013 Aceptación: 19/07/2013



Rodríguez, Eddy
Universidad del Zulia, Venezuela
eddyjackeline@yahoo.es

RESUMEN

La educación matemática realista (EMR) tiene sus cimientos en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática, en la Universidad de Utrech (Holanda), conocido hoy como Instituto Freudenthal, fundado en el año 1970. Los seguidores de esta corriente consideran que las matemáticas son la actividad humana de buscar y resolver problemas de la realidad, donde el alumno pasa por diferentes niveles de comprensión, siguiendo el proceso que ellos llaman matematización progresiva. Este trabajo tuvo por objetivo el análisis y reflexión de esta teoría bajo el estudio de un problema situacional. Para ello, se partió de una noción general de la educación matemática realista, resaltando sus características y principios; se describió el modelo teórico del aprendizaje realista aplicado a los profesores en formación, y se expuso una visión de la teoría curricular, investigación, didáctica y proyecto de matemática realista (PMR). La metodología empleada consistió en una revisión teórica partiendo de la consulta de autores especialistas tales como: Alsina (2009), Zolkower Bressan, y Gallego (2004), Freudenthal (1983), Giménez, Santos y da Ponte (2004). Se concluyó, que el estudiante bajo un problema contextual diseñado con las características de la teoría de matemática realista, desarrolla una reflexión sistemática (matematización) a través de un proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal; aprende de la experiencia como un proceso natural, no dejando lugar a la enseñanza dirigida y es capaz de discutir en grupo con diversas expectativas y habilidades, desarrollando una autorregulación.

Palabras clave: Problemas situacionales, Educación Matemática Realista (EMR), Matematización, Aprendizaje.

NOTIONS OF REALISTIC MATHEMATICS THEORY. EXAMPLE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

Realistic Mathematics Education (EMR) has its foundations in the Institute for the Development of Mathematics Education at the University of Utrech (Netherlands), known today as Freudenthal Institute, founded in 1970. The followers of this movement believe that mathematics is the human activity of seeking and solving problems of reality, where the student goes through different levels of understanding following the process they call progressive mathematization. This work aims to analyze and reflect upon this theory on



the study of a situational problem. This is part of a general notion of realistic mathematics education highlighting its key features and principles, describes the learning theorists realistic model applied to teachers in training as well as a vision of curriculum theory, research, didactics and Math Project realistic (PMR). Alsina (2009), Zolkower, Bressan and Gallego (2004), Freudenthal (1983), Giménez, Santos and da Ponte (2004). It concludes that the student under a contextual problem designed with the characteristics of realistic mathematical theory, develops a systematic reflection (mathematization) through a learning process to reconstruct formal mathematical knowledge, learn from the experience as a process naturally, leaving no room for directed teaching, and is able to discuss in a group with different expectations and skills, developing self-regulation.

Keywords: Situational problems, Realistic Mathematics Education (RME), Mathematization, Learning.

NOZIONI DELLA TEORÍA MATEMATICA REALISTA. ESEMPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

RIASSUNTO

L'educazione matematica realista (EMR) ha le sue basi nell'Istituto per lo Sviluppo dell'Educazione Matematica, presso l'Università di Utrecht (Olanda), conosciuto attualmente come Istituto Freudenthal, il cui è stato fondato nel 1970. I seguitori di questa corrente considerano che la matematica è un'attività umana per cercare di risolvere i problemi della realtà, dove il discente passa da diversi livelli di comprensione seguendo il processo da lui chiamato matematizzazione progressiva. Questo lavoro ha come finalità, l'analisi e la riflessione di questa teoria secondo lo studio di un problema situazionale. Per questo, si parte da una nozione generale dell'educazione matematica realista evidenziando le sue caratteristiche e principi. Viene descritto il modello teorico dell'apprendimento realista applicato ai professori in aggiornamento; così come una visione della teoria curricolare, ricerca, didattica e progetto di matematica realista (PMR). Si conclude che lo studente di fronte ad un problema contestuale disegnato con le caratteristiche della teoria della matematica realista, sviluppa una riflessione sistematica (matematizzazione) tramite un processo di apprendimento che permette ricostruire la conoscenza matematica formale, impara dall'esperienza come un processo naturale, non lasciando posto all'insegnamento diretto; ed è capace di discutere in gruppi con diverse aspettative e abilità, sviluppando un'autoregolazione.

Parole chiave: Problemi situazionali, Educazione Matematica Realista (EMR), Matematizzazione, Apprendimento.

INTRODUCCIÓN

La educación matemática realista (EMR) nace en los años 60, en Holanda, como oposición a las corrientes de la época, bajo las ideas de Hans Freudenthal (1905-1990), quien fue un matemático y educador de origen alemán y familia judía, incansable propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática, fundador y participante activo de grupos tales como: Grupo Internacional de Psicología y Educación



Matemática (PME) y Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM), en cuyas reuniones manifestaba su oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las innovaciones en la enseñanza vinculadas a la matemática de mediados del siglo pasado.

La oposición de Freudenthal a la psicología, la pedagogía y la didáctica de la época se fundamentó en su conocimiento profundo de la disciplina matemática, en su interés por la enseñanza y su experiencia recogida en las aulas. La EMR tiene sus bases en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática, en la Universidad de Utrech, conocido hoy como Instituto Freudenthal, que fundó este junto con otros colaboradores en el año 1970.

Los seguidores de esta teoría se extienden por algunos países de Europa y América, destacándose por ejemplo en Latinoamérica el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM) creado en febrero del 2000 por las profesoras Ana Bressan y Betina Zolkower.

Desde el enfoque de esta teoría, la matemática no es una conexión de temas separados y aislados, la EMR enfatiza la interrelación de las ideas matemáticas y su utilidad, así lo demuestran los trabajos sobre: el creciente número de investigaciones sobre representaciones múltiples (Castiglione, s/f), representación de porcentaje (Marja van den, 2009), problemas de operaciones (Giménez, Santos y da Ponte, 2004) y problemas geométricos (Freudenthal, 1983), entre otros, lo que pone de manifiesto la necesidad de planificar actividades que permitan a los alumnos advertir la existencia de estas interconexiones.

La perspectiva realista sostiene que la matemática posee valor educativo, siempre que el alumno comprenda, participe y critique los modos en que esta disciplina organiza diversas esferas del entorno social y natural (Zolkower, Bressan y Gallego, 2006); esto demuestra la relevancia que esta corriente le da a la actividad humana y su entorno.

Este trabajo tuvo por objetivo mostrar a través de un problema situacional, el proceso de matematización progresiva y reinención guiada, características que definen a la educación matemática realista. En consecuencia, se decidió dividirlo en dos sesiones:

La primera, expone una noción general de la EMR, que contiene los principios y proceso de matematización progresiva, los fundamentos teóricos del aprendizaje realista destacando los principios que subyacen a la formación realista del docente; una visión de la teoría curricular, investigación y didáctica aplicada en la EMR y las características de un proyecto de matemática realista.

La segunda, desarrolla un ejercicio que plantea una situación problema que tiene por objetivo introducir el concepto de ecuaciones diferenciales de orden uno de variables separables.

NOCIÓN GENERAL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR)

Esta teoría se desarrolla en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrech (Holanda), hoy conocido como Instituto Freudenthal.



Inicialmente, la EMR más que ser una teoría clara y sencilla de educación matemática, consistió en ideas básicas centradas en el cómo y en el qué de la enseñanza matemática (Alsina, 2009).

Esta corriente didáctica nace en los años 60 como reacción tanto al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética como a la aplicación directa al aula de la matemática moderna o conjuntista. Freudenthal concibe a la matemática como una actividad humana que consiste en matematizar, o sea, organizar o estructurar la realidad, incluida la matemática misma (Zolkower, Bressan y Gallego, 2006) y considera las siguientes características:

- a) Los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos.
- b) El uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones.
- c) La centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza/ aprendizaje.
- d) El papel clave del docente como guía.
- e) La importancia de la interacción grupal.
- f) La fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática.

En el aula, la matematización progresiva se ancla en las construcciones que hacen los alumnos a partir de situaciones problemáticas realistas. En holandés, “zichrealis-eren” significa “imaginar”; o sea, una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada (Zolkower, Bressan y Gallego, 2006). Actualmente, la EMR se basa en seis principios fundamentales (Alsina, 2009), como se observa:

Tabla 1. Principios de la EMR

Principio	¿Qué es?	¿Cómo puede trabajarse?
De actividad	Las matemáticas son una actividad humana a las que todas las personas pueden acceder. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, también es una actividad de organización de un tema.	Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.



Continuación Tabla 1.

De niveles	<p>Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Situacional: en el contexto de la situación. • Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. • General: exploración, reflexión y generalización. • Formal: procedimientos estándares y notación convencional. 	<p>Esquematización progresiva (profesor) y reinención guiada (aprendiz), las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.</p>
De reinención guiada	<p>Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.</p>	<p>Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.</p>
De interacción	<p>La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes con sus compañeros y los profesores pueden provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.</p>	<p>La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.</p>
De interconexión	<p>Los bloques de contenidos matemáticos (numeración y cálculo, algebra, geometría...) no pueden ser tratados como entidades separadas.</p>	<p>Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.</p>

Fuente: Alsina (2009).

En particular, Freudenthal busca desarrollar en los alumnos una actitud matemática, desde edades tempranas (Zolkower, Bressan y Gallego, 2004) incluyendo las siguientes disposiciones o estrategias como base para lograr otras en edades mayores:

- Desarrollar un lenguaje que suba de nivel desde lo ostensible (por ejemplo, señalar, indicar con artículos demostrativos) y lo relativo (específico a un contexto o a una situación determinada) hasta el uso de variables convencionales y lenguaje funcional. Cambiar de perspectiva o punto de vista y reconocer cuando un cambio de perspectiva es incorrecto dentro de una situación o problema dado.

- Identificar estructuras matemáticas dentro de un contexto (si es que las hay) y abstenerse de usar la matemática cuando esta no es aplicable. Tratar la propia actividad como materia prima para la reflexión, con miras a alcanzar un nivel más alto.

En el principio de niveles, Freudenthal completa el proceso de reinención con lo que Treffers (1987), referenciado por Zolkower Bressan, y Gallego (2004), llama matematización progresiva, bajo dos formas:

- Matematización horizontal: que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva. En este proceso se traduce los problemas desde el mundo real al matemático.

- **Matematización vertical:** ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática. En este proceso se resuelve el problema traducido mediante la utilización de sus conceptos y destrezas matemáticas.

Los niveles de comprensión, según Zolkower Bressan, y Gallego (2004), son: situacional, referencial, de generalización y de formalización, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva y no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada.

- En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias, son utilizados en el contexto de la situación (generalmente con recursos fuera de la escuela).

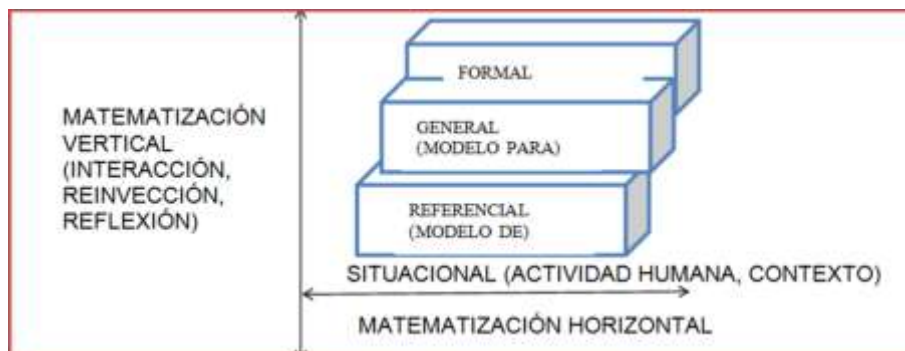
- En el nivel referencial: es donde aparecen los modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referido a la situación particular.

- El nivel general: se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto.

- En el nivel formal: se trabaja con los conocimientos y notaciones convencionales.

La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente. Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno, sirven para monitorear sus procesos de aprendizaje. Una esquematización de los niveles se presenta en la figura 1.

Figura 1. Niveles en la matematización



Fuente: Zolkower, Bressan y Gallego (2004).

Modelo del aprendizaje realista:

El modelo de formación denominado aprendizaje realista se fundamenta en la Educación Matemática Realista fundada por Hans Freudenthal, y además se sustenta en la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano de Vygostky y el aprendizaje reflexivo de Schön (Alsina, 2009).

Los fundamentos teóricos del aprendizaje realista se establecieron en el marco del Proyecto Comenius 2003-2005, denominado: Aprender en y a través de la práctica: Profesionalización de los futuros profesores europeos mediante el aprendizaje reflexivo, coordinado por el profesor Ko Melief, de la Universidad de Utrecht.

A partir de las bases teóricas establecidas en este proyecto internacional, se crea el libro El aprendizaje realista en la formación inicial del profesorado, de Esteve, Melief y Alsina, en el que publican los fundamentos teóricos de este modelo de formación y aportan instrumentos y técnicas concretas para implantar el aprendizaje realista en las aulas universitarias y describen experiencias de formación del profesorado de distintos campos, entre ellos la educación matemática.

Existen actualmente cinco principios que subyacen a la formación realista del profesorado, propuestos por Ko Melief, Anke Tigchelaar, Fred Korthagen y Martine van Rijswijk (Alsina, 2009), que se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 2. Principios en la formación realista

Principio	En qué consiste	Qué Deriva
El punto de partida son las cuestiones que emergen de la práctica y que experimenta el profesor(a) en formación en un contexto real del aula.	<ul style="list-style-type: none"> La formación se inicia con las observaciones que realizan los profesores en formación en situaciones concretas del aula, en las que participa activamente. <ul style="list-style-type: none"> Planteamiento inductivo. 	<ul style="list-style-type: none"> Co-construcción de conocimientos: los saberes y experiencias de los estudiantes interactúan con saberes y competencias nuevas que aportan el profesor, otros compañeros u otras fuentes de recursos.
La formación realista pretende fomentar una reflexión sistemática.	<ul style="list-style-type: none"> El planteamiento reflexivo parte del supuesto que aprender de la misma experiencia es un proceso natural, que deja poco margen para un aprendizaje dirigido. 	<ul style="list-style-type: none"> Colaboración entre iguales: la interacción ofrece un gran potencial para el fomento y desarrollo de los procesos cognitivos superiores del aprendizaje.
El aprendizaje es un proceso social e interactivo	<ul style="list-style-type: none"> Las discusiones en grupo promueven la reflexión. <ul style="list-style-type: none"> El aprendizaje empieza cuando un grupo de personas con diversas expectativas, experiencias, habilidades y ritmos de aprendizaje entran en contacto. <ul style="list-style-type: none"> Genera que los futuros profesores estructuren sus experiencias, comparando sus análisis de la práctica con los demás (retroalimentación). Las interacciones reflexivas entre los aprendices profundizan el proceso intencionado de un aprendizaje profesional (reflexión y construcción colectivas). 	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión individual y grupal: la intervención pedagógica ayuda a que el docente en formación siga su propio proceso. Autorregulación: el objetivo es que llegue por sí mismo a los aspectos que quiere o debe cambiar o mejorar y buscar soluciones y evaluarlas por sí mismo. Desarrollo de competencias profesionales.

Continuación Tabla 2.

<p>Se distinguen tres niveles en el aprendizaje en la formación de profesorado (el nivel de representación, Esquema y Teoría), y se trabaja en los tres niveles.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Nivel de Representación: cuando alguien reacciona sin pensarlo mucho (situación espontánea en el aula, inconsciente). <ul style="list-style-type: none"> • Nivel de Esquema: cuando alguien reflexiona sobre una situación, sobre las discusiones que resultan de ella y sobre situaciones similares, desarrolla conceptos, características, principios, que sirven para describir la práctica. • Nivel de Teoría: se construye un orden lógico con respecto a los conocimientos subjetivos anteriormente surgidos. Se analizan las relaciones conceptuales dentro de un esquema individual o se vinculan numerosos esquemas para obtener una teoría coherente.
<p>En la formación realista se considera a los profesores(as) en formación personas con una identidad propia, a cuyo efecto se fomenta la autonomía y la construcción autorregulada del desarrollo profesional.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se fundamenta en que los futuros profesores tengan una conciencia de sí mismos que constituya la base para construir su propio potencial. <ul style="list-style-type: none"> • Se fomenta la construcción.

Fuente: Alsina (2009).

Teoría curricular, investigación y didáctica:

Para la EMR la teoría curricular no es un conjunto fijo, preestablecido de teorías, propósitos, significados, contenidos y métodos. Más bien, es siempre relativo a procesos. La teoría curricular es un esfuerzo práctico del cual las nuevas ideas teóricas pueden surgir como una clase de subproductos científicos. El desarrollo curricular es conducido en las escuelas, en colaboración con los profesores y estudiantes.

El rasgo más saliente de la posición de Freudenthal es su visión de currículo como proceso y como su propia alternativa al desarrollo del currículo, lo que él llamó desarrollo educativo. Este desarrollo educativo pretende fomentar un cambio actual en la marcha de la enseñanza en clase. Consecuentemente, tal desarrollo educativo es mucho más que un diseño instruccional; es una innovación estratégica, fundada, por una parte, en una filosofía educativa explícita, y por otra, incorpora el desarrollo de toda clase de materiales como parte de esa estrategia.

El motor de todo este proceso es el desarrollo de investigación, una aproximación que instala muy bien la tradición pedagógica; es una investigación cualitativa/interpretativa relacionada a las experiencias de enseñanza en clases individuales. Asigna un papel central al diálogo entre los investigadores, los que desarrollan el currículo y los profesores.

El desarrollo curricular comienza con un experimento pensado, imaginado y guiado, mediante el cual se debe llegar a una solución personal. El conocimiento de la historia de las matemáticas se puede usar como un dispositivo heurístico en este proceso.

Para esta corriente, el propósito de la investigación sobre el desarrollo es crear la oportunidad para que los que están por fuera, por ejemplo los docentes, vuelvan sobre los pasos del investigador del proceso de aprendizaje. En el centro de estas reflexiones está el experimento pensado por el investigador. El desarrollista debe concebir de qué manera avanzan los procesos de enseñanza y aprendizaje, debe consecuentemente tratar de



encontrar evidencia en un experimento de enseñanza para mostrar si estas expectativas son ciertas o equivocadas.

La retroalimentación de la experiencia práctica sobre las nuevas experiencias pensadas, deben inducir una interacción entre desarrollo e investigación: lo que es inventado en un escritorio debe ser puesto en práctica inmediatamente; lo que sucede en el aula debe ser analizado de modo consistente y los resultados aplicados a la continuación del desarrollo del trabajo (Gravemeijer y Teruel, 2000).

La investigación del desarrollo tiene un nivel de teorías y un nivel de productos curriculares. El desarrollo de la investigación en EMR, llevada a cabo fuera y dentro del instituto Freudenthal, dio como resultado una rica secuencia de prototipos instruccionales y otras publicaciones prácticas.

La palabra didáctica para esta teoría se refiere a los procesos correctos de enseñanza y aprendizaje, partiendo de la realidad y permaneciendo en ella. En la fenomenología didáctica, las situaciones deben ser seleccionadas de modo que puedan ser organizadas por los objetivos matemáticos que se supone que los alumnos deben construir. El objetivo es considerar cómo el objeto pensado describe y analiza el fenómeno, cómo puede hacer el fenómeno accesible para el cálculo y la actividad de pensamiento.

Las situaciones en la que se aplica un tema matemático dado, deben ser investigadas para estimar su conveniencia como puntos de impacto del proceso de matematización progresiva. Si se ve a la matemática, como históricamente se considera, como una forma práctica de resolver problemas, sería razonable esperar encontrar los problemas que den relevancia a esos procesos en las aplicaciones actuales.

Después se puede imaginar que la matemática formal se tome en un proceso de generalización y formalización de conceptos y procedimientos de resolución de problemas en situaciones específicas sobre una variedad de situaciones. El objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problema de las cuales se puede generalizar situaciones de abordaje, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical.

Proyecto matemáticos realistas (PMR):

La idea de PMR se enmarca en la línea de la modelización y matematización. Para poder realizar estas actividades, el alumno debe plantearse un tema que ha de corresponder con un problema del entorno social que sea matematizable. Para lograrlo, Giménez, Santos y da Ponte (2004) consideran:

- Plantear un conglomerado de varias preguntas o problemas en una misma situación.
- La situación básica es auténtica y dinámica.



- Reconocer un orden de complejidad y nivel creciente de dificultad en el proceso.
- Invitar al estudiante a sumergirse y focalizar en procesos y patrones de cambios, relaciones y diversidad de modelos para comprobar la validez de las respuestas.

Se trata de una actividad de producción matemática que debe dar respuesta al problema inicial, teniendo en cuenta que esta respuesta no es matemática. Las matemáticas han intervenido en la acción, pero no son el objetivo final. Los proyectos colaboran en la formación más integral del individuo. El objetivo del proyecto no es conceptual sino procedimental, es aplicativo en la medida que cumple el ciclo de la modelización que parte de lo real y regresa a lo real.

PLANTEAMIENTO Y ANÁLISIS DE UN PROBLEMA SITUACIONAL

En esta sección se describe el enfoque de la EMR para introducir el concepto de ecuaciones diferenciales de orden uno de variables separables. Se inicia con el planteamiento de una situación que pueda ser imaginada por los estudiantes. Es importante aclarar que este ejemplo es realizado de manera hipotética, parte de la reflexión como investigador, no ha sido planteado en un salón de clase, sin embargo, sobre la base de la experiencia, se propone la manera cómo avanzan los procesos de enseñanza y aprendizaje bajo situación problema.

Se considera como problema:

Medir cómo cambia la temperatura de un vaso con agua desde el momento en que se coloca en el refrigerador hasta que luego de un tiempo es retirado del mismo. Con esto, el alumno es colocado en una situación problema cotidiana, y podría como primeras actividades exploratorias:

- Tomar la temperatura del vaso con agua cada cierta cantidad de tiempo, por ejemplo cada cinco minutos.
- Tomar la temperatura del vaso justo antes de ser colocado en el refrigerador.
- Observar a qué temperatura está el refrigerador.

Una vez registrados estos valores podría hacerse una tabla de datos y una gráfica de tiempo versus temperatura. En una interacción con sus compañeros y docente, ya en el aula, cada estudiante comunicará y argumentará por qué hizo esas actividades exploratorias y qué herramientas de las matemáticas usó, es decir, el alumno reflexiona de manera individual y en grupo, y es posible, sino con ayuda del profesor, que observe que el comportamiento de la gráfica de cada uno de sus compañeros es similar a la obtenida por él. Eso crea un modelo gráfico.

También el alumno, posiblemente guiado por el profesor, descubre que el problema conlleva a cambios o variaciones de temperatura en el tiempo y piensa que el problema se puede formular como una ecuación con derivada, es decir, se crea otro modelo. Para



llegar a esto, el estudiante reflexiona sobre el uso de otra herramienta matemática. Esto lleva al estudiante a aplicar conocimientos matemáticos, logrando la matematización horizontal del problema.

Al comparar sus datos con los compañeros analiza que la variación de temperatura está relacionada con la temperatura del refrigerador y con la temperatura del vaso con agua, es decir, en las gráficas observa que el corte con el eje de las temperaturas no es el mismo para todas, y que el menor valor que tomaba la temperatura en la gráfica tampoco coincidía entre ellas, a partir de esta reflexión plantea un modelo del problema.

$$\frac{dT_v}{dt} \propto (T_v - T_r)$$

Asume como posible anotación:

T_v : Temperatura del vaso con agua

T_r : Temperatura del refrigerador

t : Tiempo

También reflexiona acerca de la solución de este problema y piensa qué se logra al integrar la ecuación obtenida como modelo. Sin embargo, dentro de su conocimiento, solo sabe resolver ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Entonces, sigue reflexionando y lleva la ecuación del modelo a dos ecuaciones de las forma como sabe resolverlas. Ya en estos momentos, se analizan y reflexionan los modelos, hasta ahora obtenidos, para mejorarlos:

- Se plantea la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_A)$$

T : Temperatura del objeto de estudio

T_A : Temperatura del ambiente que lo rodea

t : Tiempo

K : Constante de proporcionalidad

- Se plantea y se resuelve las dos ecuaciones que da la solución a la ecuación diferencial del problema:

-

$$\frac{dT}{T - T_A} = C$$



$$Kdt = C$$

C : es una constante.

Que es: $T = T_A + Ce^{Kt}$

En este momento el estudiante ha resuelto el problema particular y es conveniente que el docente proponga otros problemas que se resuelvan de forma similar. Así, por ejemplo, puede ser interesante para el estudiante saber cada cuánto tiempo debe tomarse un medicamento una persona enferma de gripe para que se recupere.

En este problema el estudiante reflexiona y concluye que lo que realmente se quiere saber, es cuánto tiempo tarda en eliminarse el medicamento de la sangre, de manera que en ese instante deba tomarse nuevamente el medicamento. Esto lo lleva a razonar que es una variación del medicamento en la sangre y que este disminuirá en forma proporcional a la cantidad de medicamento en la sangre, formando el modelo:

$$\frac{dM}{dt} = KM$$

Donde la notación:

M : Cantidad de medicamento

t : Tiempo

K : Constante de proporcionalidad (negativa porque hay disminución)

Ya esta ecuación diferencial es conocida para el estudiante y sabe resolverla:

$$\frac{dM}{M} = C$$

$$Kdt = C$$

C es una constante

Su solución es:

$$M = Ce^{kt}$$

También puede reforzarse el conocimiento colocando diferentes ejercicios que el estudiante pueda imaginar, aunque no sea una situación cotidiana. Aquí el estudiante está en el nivel referencial. Ha resuelto los problemas particulares. Para llegar a un nivel general, se expresa la ecuación del modelo para resolver ecuaciones diferenciales de orden uno de variables separables:



$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

De donde las dos ecuaciones que se forman son:

$$\frac{dy}{g(y)} = C$$

$$f(x)dx = C$$

Por último, ya en un nivel formal la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Cuando $F(x, y) = f(x)g(y)$, y $g(y) \neq 0$

Tiene por solución:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C$$

Donde $G(y)$ y $F(x)$ corresponde a las integraciones respectivas.

Durante el desarrollo del problema situacional, se puede destacar que hay la incorporación de actividades humanas, donde el estudiante toma el mundo que lo rodea, entiende el problema contextual y lo matematiza, poniendo en evidencia los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y la modelización, todo esto dentro de los principios de actividad y de realidad.

De igual manera, el problema situacional lleva al estudiante a pasar por diferentes actividades de niveles, en una continua reflexión, hasta que llega no solo a la solución del problema, sino a la generalización y formalización matemática. Para llegar a la consolidación de los objetos mentales y conceptos, el alumno interactúa con sus compañeros y docente discutiendo el grado de eficacia de sus estrategias y cuestionando las alternativas e interrelacionando todos los contenidos matemáticos (cálculo, geometría...). Esto revela los principios de niveles, de reinención guiada, de interacción y de interconexión.

CONCLUSIÓN

La realización de problemas situacionales dentro del salón de clase, lleva sin lugar a duda al estudiante a crear actividades de modelización, a plantear y resolver problemas, a utilizar un lenguaje simbólico matemático y a crea procesos de metacognición.



La enseñanza con esta teoría busca que el estudiante pase por diferentes niveles de aprendizaje, en continua reflexión y reconstruya los conocimientos matemáticos para llegar a la solución de problemas y formalización matemática. Interactúe con sus compañeros y docente bajo un ambiente de discusión en miras de seleccionar estrategias y cuestionar las alternativas, interrelacionando diferentes bloques del conocimiento.

Para que toda la dinámica en los problemas contextuales se desarrolle, es importante que se tenga presente el aprendizaje realista, donde el objetivo es que el estudiante desarrolle una reflexión sistemática, aprenda de la misma experiencia como un proceso natural, autónomo, que limita el aprendizaje dirigido. Que esté en capacidad de discutir en grupo con diversas expectativas, habilidades y que desarrolle una autorregulación.

Con este estilo de problemas situacionales, el alumno es motivado a crear proyectos de matemática realista, donde propone el problema situacional basado en la realidad y llega a su solución mediante la transición de estrategias matemáticas. Con este estilo de proyectos se consolida la formación integral del individuo en su entorno social.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. Documento en línea. Disponible en:

http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEM_XIII-AngelAlsina.pdf Consulta: 11/03/2013.

Castiglione, D. (s/f). Conexiones matemáticas múltiples a partir de tres problemas en contexto realista. Documento en línea. Disponible en:

http://www.gpdmatematica.org.ar/experiencias_pdf/conexionesmatematicas.pdf Consulta: 22/02/2013.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, Holland. PREFACE.

Giménez, J.; Santos, L. y da Ponte, J. (2004). La actividad matemática en el aula. Barcelona, España. GRAÓ.

Gravemeijer, K. y Teruel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. Journal Curriculo Studies, Vol. 32, (6), Pp. 777-796.

Marja van den, H. (2009). El uso didáctico de modelos en la educación matemática realista: ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Segunda parte. Documento en línea. Disponible en:

http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2009_CDM_didactical-use-of-model_part2.pdf Consulta: 22/02/2013.

Zolkower, B.; Bressan, A. y Gallego, M. (2004). I Parte: la educación matemática realista. Principios en que se sustenta. Documento en línea. Disponible en:



UNIVERSIDAD
Privada
DR. RAFAEL BELLOSO CHACÍN



http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf.

Consulta: 11/03/2013.

Zolkower, B.; Bressan, A. y Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. Documento en línea. Disponible en:

http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8180/publicaciones/bitstream/1/2670/1/YUPANA_3_2006_pag_11_33.pdf.

Consulta: 04/02/2013.