UNIVERSIDAD Rafael Belloso Chacín
REDHECS

Principios de la Educación Matemática Realista y el uso de Software en la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales

Principles of Realistic Mathematics Education and the use of Software in teaching Differential Equations

Principi di didattica della matematica realistica e utilizzo di software nell'insegnamento delle equazioni differenziali

Eddy Jackeline Rodríguez
Universidad del Zulia “LUZ”, Facultad de Ingeniería. Venezuela.
eddyjackeline@yahoo.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3558-2189

Resumen

Bajo la filosofía de la educación matemática realista (EMR) la pedagogía docente tiende a la construcción del conocimiento mediante la experiencia significativa que convierte al estudiante en sujeto activo protagonista de su aprendizaje. En esa dinámica se fortalece su creatividad, autonomía, formación de criterios; su desarrollo intelectual y disciplinal, en síntesis, el desarrollo de la persona. Este trabajo tuvo por objetivo analizar los principios de la EMR y la reflexión de éstos bajo el estudio de un problema situacional usando la herramienta del software como apoyo en el aprendizaje. Para lograr esto, se exponen los principios de la EMR, se caracteriza el proyecto matemático realista (PMR), se explica la relevancia de la modelización matemática y se describen algunos softwares que sirven de apoyo para la enseñanza de la matemática. La metodología empleada consistió en una revisión teórica partiendo de la consulta de autores especialistas tales como: Alsina (2009), Zolkower, Bressan, y Gallego (2004), Freudenthal (1983), Cárcamo, Gómez y Fortuny (2015), Gómez-Chacón, Maestre (2008). Se concluyó que, bajo los principios de la EMR, el estudiante desarrolla habilidades de matematización y de resolución de problemas contextualizados. Ello implica reflexionar en grupo, aprender de la experiencia de forma natural, desarrollar actitudes positivas; ello en orden a la aplicación del conocimiento matemático formal. Además, se demostró que el uso del software brinda al estudiante una herramienta eficaz para la resolución y entendimiento de los problemas matemáticos, por ende, con una guía del profesor, avanza en los niveles de aprendizaje.

Palabras clave: Educación matemática realista; Software; Ecuaciones Diferenciales.

Abstract

Under the philosophy of realistic mathematics education (RME), teaching pedagogy tends to construct knowledge through meaningful experience that turns the student into an active protagonist of his or her learning. In this dynamic, their creativity, autonomy, and formation of criteria are strengthened; their intellectual and disciplinary development, in short, the development of the person. This work aimed to analyze the principles of EMR and their reflection under the study of a situational problem using

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

the software tool as support in learning. To achieve this, the principles of EMR are presented, the realistic mathematical project (PMR) is characterized, the relevance of mathematical modeling is explained and some software that supports the teaching of mathematics is described. The methodology used consisted of a theoretical review based on the consultation of specialist authors such as: Alsina (2009), Zolkower, Bressan, and Gallego (2004), Freudenthal (1983), Cárcamo, Gómez and Fortuny (2015), Gómez-Chacón , Master (2008). It was concluded that, under the principles of EMR, the student develops mathematization and contextualized problem-solving skills. This involves reflecting in a group, learning from the experience naturally, developing positive attitudes; this in order to the application of formal mathematical knowledge. In addition, it was demonstrated that the use of the software provides the student with an effective tool for solving and understanding mathematical problems, therefore, with a teacher's guidance, they advance in learning levels.

Keywords: Realistic mathematics education; Software; Differential equations

Riassunto

Secondo la filosofia dell’educazione matematica realistica (RME), la pedagogia dell’insegnamento tende a costruire la conoscenza attraverso un’esperienza significativa che trasforma lo studente in un protagonista attivo del suo apprendimento. In questa dinamica si rafforza la loro creatività, autonomia e formazione di criteri; il loro sviluppo intellettuale e disciplinare, in breve lo sviluppo della persona. Questo lavoro mirava ad analizzare i principi dell'EMR e la loro riflessione nello studio di un problema situazionale utilizzando lo strumento software come supporto nell'apprendimento. Per raggiungere questo obiettivo, vengono presentati i principi dell'EMR, viene caratterizzato il progetto matematico realistico (PMR), viene spiegata l'importanza della modellazione matematica e vengono descritti alcuni software che supportano l'insegnamento della matematica. La metodologia utilizzata consisteva in una revisione teorica basata sulla consultazione di autori specialisti come: Alsina (2009), Zolkower, Bressan e Gallego (2004), Freudenthal (1983), Cárcamo, Gómez e Fortuny (2015), Gómez-Chacón , Maestro (2008). Si è concluso che, secondo i principi dell'EMR, lo studente sviluppa capacità di matematizzazione e di risoluzione dei problemi contestualizzati. Ciò implica riflettere in gruppo, imparare dall'esperienza in modo naturale, sviluppare atteggiamenti positivi; ciò al fine di applicare la conoscenza matematica formale. Inoltre, è stato dimostrato che l'utilizzo del software fornisce allo studente uno strumento efficace per risolvere e comprendere problemi matematici e pertanto, con la guida dell'insegnante, avanza nei livelli di apprendimento.

Parole chiave: Educazione matematica realistica; Software; Equazioni differenziali

Introducción

Este artículo se centra en la línea didáctica llamada Educación Matemática Realista (EMR) cuyo fundador es el Dr. Hans Freudenthal (1905-1990). Tiene su origen en Holanda en los años 70, como reacción frente a la corriente de la

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Matemática Moderna y a la tendencia mecanicista de la enseñanza de la matemática, de ese momento en Holanda. Sus publicaciones sobre EMR inician en 1948, en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO), llamado en la actualidad Instituto Freudenthal, en 1870 en la Universidad de Utrecht.

Dentro de los estudiosos en Latinoamérica de esta teoría, se encuentran las profesoras Ana Bressan y Betina Zolkower quienes fundaron el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM), en febrero de 2000. Los seguidores de esta corriente de enseñanza, definen la matemática como una actividad humana de estructuración, de matematización que parte de la experiencia y de la acción del alumno y conlleva al conocimiento matemático. Esta forma de enseñanza está relacionada con el mundo real hasta el punto que se convierte en un valor humano para la sociedad.

La Educación Matemática Realista (EMR), conecta lo real e imaginable tangible o no tangible con la matemática, esto se observa en los trabajos de investigaciones sobre: ecuaciones diferenciales (Rodríguez, 2013), multiplicación, divisores, múltiplos y escala numérica (Gallego y Pérez, 2013), función, dominio, recorrido y función inversa (Pérez, et al 2016), ecuaciones de rectas y circunferencias con el software Geogebra (Gómez-Chacón y Maestre, 2008) entre otros, lo que pone en evidencia, la necesidad de planear actividades que muestren al estudiante esta interconexión.

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), generan nuevos escenarios para el aprendizaje, especialmente de las matemáticas, aportando una mayor interactividad entre docentes y alumnos. Puede ser usado en todos los niveles educativos, aprovechando las habilidades de los aprendices en el manejo de las TIC.

Existen diferentes softwares que sirven de apoyo en el aprendizaje de la matemática, tales como, Geogebra, Maxima, Matlab, entre otros, facilitando al estudiante la comprensión sobre el funcionamiento de los modelos teóricos matemáticos, ya que brindan mayor flexibilidad acerca del momento y lugar; permitiendo al estudiante la auto-evaluación y la auto-corrección.

El presente trabajo, tiene por objetivo exponer los principios de la educación matemática realista, enfatizando la interrelación entre un problema situacional, reinvención guiada, reflexión y estructuras de niveles de formación, acompañado con el uso de la tecnología. En consecuencia, se divide el trabajo en dos sesiones: la primera, describe dichos principios, el proyecto matemático realista, la modelización

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

matemática y el software, como una herramienta en la solución de problemas matemáticos. La segunda, plantea un problema real, que involucra al alumno con los intereses de la comunidad, con el cual, se introduce la teoría de ecuación diferencial ordinaria lineal y su solución con el uso de software.

Los principios de la EMR, establecen un modelo de formación activa. Con este enfoque, se diseña un problema situacional que une al estudiante con su comunidad, en el cual, identifica las características del problema llevándolo al campo de la matemática para encontrarle solución. El docente, motiva y guía al estudiante a repensar la situación, incorporando los conocimientos existentes, interactuando con sus compañeros y formulando modelos para llegar a la solución del problema en particular y posteriormente llegar al nivel de la formalización matemática.

Fundamentos teóricos

Principios de la Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR), expone un enfoque inverso a la enseñanza convencional de la matemática, se basa en diseñar problemas dentro de un entorno real, de tal forma que el proceso que lleva a la solución sea posible para el alumno, a través de la matematización progresiva en un continuo movimiento horizontal (traducir los problemas del mundo real al matemático) y movimiento vertical (resolver el problema usando la teoría matemática).

Si vemos a la matemática, como se le ha considerado históricamente; una manera práctica de resolver problemas, es razonable considerar que existen situaciones donde se puedan aplicar nuevos métodos; por tanto, podemos imaginar que la matemática formal se convierte en un proceso de generalización y formalización de conceptos y procedimientos para la resolución de problemas en condiciones específicas (Gravemeijer & Teruel, 2000).

La teoría de la EMR, conecta a la matemática con el entorno natural del estudiante, para ello, es necesario planificar actividades que le permitan percibir esta interrelación. Presentando temas reales o imaginables, donde el alumno viva la experiencia, bajo la observación, análisis y discusión; que lo guía al desarrollo de la capacidad de resolver problemas de su entorno mediante la matemática como herramienta; así lo muestran en sus trabajos los autores Gómez-Chacón y Maestre, (2008); Rodríguez, (2013); Cárcamo et al. (2015); Riveros et al. (2020).

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

De acuerdo a Freudenthal, la EMR es una filosofía, que se basa en los siguientes postulados (Bressan et al. 2004):

- Matematizar las matemáticas, considerándolas una actividad humana.
- Dar importancia al desarrollo de la comprensión matemática, ya que esta ocurre, en diferentes niveles donde el contexto y los modelos juegan un papel significativo para que se dé una heterogeneidad cognitiva en el proceso de aprendizaje a través de una reinvención guiada.
- Desde una perspectiva curricular, se debe impulsar una reinvención guiada, ya que permite ver la actividad matemática desde la fenomenología didáctica como un método de investigación, ya que se debe buscar los contextos y situaciones que permitan cubrir las necesidades organizativas de las matemáticas, bien sea a través de la historia o de las invenciones de los estudiantes.

Estas ideas conforman los principios de la Educación Matemática Realista que presentaremos a continuación:

a. Principio de actividad: la matemática se presenta como una acción humana, ya que, todas las personas tienen acceso a su aprendizaje, el cual se basa, en hacer. Freudenthal, consideraba que se debe crear en los alumnos una actitud matemática, con el objeto, de continuar en su formalización a medida que el alumno avanza en sus grados de estudios. Algunas estrategias para el logro de esto son:

- Desarrollar un lenguaje de forma ascendente, partiendo desde lo más sencillo, que puede ser por señalamiento o formas demostrativas, que relacionen situaciones o contextos específicos, hasta alcanzar el manejo de variables convencionales y un lenguaje formal.
- Abordar la situación desde diferentes puntos vista.
- Identificar el nivel apropiado en la resolución del problema y el uso de las estructuras matemáticas.
- Usar la actividad de forma reflexiva, y así lograr subir de nivel hasta la formalización.

Para Freudenthal, el eje principal, en la enseñanza de las matemáticas, era como hacerla más que aprenderla, por tal motivo hizo énfasis en el proceso de

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

algoritmización, en la actividad de algebrizar, en la acción de abstraer, todo bajo la visión de la acción de matematizar. Bajo este principio, "matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar" (Alsina, 2009, p. 121). La formalización involucra la creación de modelos, simbolizar, formar esquemas, definiciones y generalizar, lo cual conlleva a reflexionar (Alsina, 2009).

b. Principio de realidad: Para Freudenthal la comprensión de la matemática consistía en conectar ésta con la realidad, desde un enfoque que puede ser imaginado, realizado y razonado por el alumno. Se pretende que el contexto o situación sea el mensaje a descubrir y las matemáticas sean el medio para lograrlo.

El diseño de una situación real puede crearse para que los estudiantes matematicen en distintos ejes matemáticos al mismo tiempo, así, por ejemplo, un juego de pelota en una cancha puede ser dirigido para llegar a los conceptos de suma algebraica, posición de puntos en el espacio, áreas de figuras planas y de superficies, entre otros. El contexto del problema debe ser progresivo, que se forme a partir de la realidad, de lo cotidiano y luego adquiera un carácter general en miras de transformarse en un modelo matemático.

Es necesario tener en cuenta las experiencias del alumno y su capacidad para visualizar los problemas al momento de diseñar los contextos realistas, partiendo de una investigación fenomenológica que busca encontrar situaciones problemáticas que permitan generalizar enfoques específicos y alcanzar a través de una situación contextual procedimientos para la base de la matematización vertical.

c. Principio de reinvención guiada: Para Freudenthal, las matemáticas son una forma de sentido común, sólo que más organizada. La educación matemática debe crear oportunidades para que los estudiantes reinventen las matemáticas bajo la guía de los profesores.

Los profesores son vistos como agentes mediadores entre los estudiantes y las situaciones problemáticas, entre los estudiantes, entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales de las matemáticas como disciplina (Bressan et al., 2004). Este principio permite al maestro guiar al estudiante en reinventar: modelos matemáticos, conceptos, operaciones y estrategias, en base a una situación problema que el docente crea. El objetivo es reconstruir el conocimiento

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

matemático formal donde el estudiante crea una estrategia de solución discutida y compartida con sus pares y con el docente.

Este proceso exige al maestro cualidades de observación, reflexión y anticipación al aprendizaje de corto, mediano y largo plazo que busca formar en el estudiante, bajo este esquema organiza actividades en el aula que conllevan a la reinvención y a los cambios progresivos de nivel de conocimiento que aspira lograr.

d. Principio de Niveles: en 1991, Freudenthal finaliza el proceso de reinvención con lo que Treffers en 1987 llamó matematización progresiva o por niveles. Bajo este principio Gravemeijer (2002) distingue cuatro niveles de comprensión:

- Situacional: relacionado con el contexto, puede usarse recursos que estén dentro o fuera del entorno de estudio.
- Referencial: se basa en la esquematización a través de modelos, descripciones. Referido a la situación particular.
- General: el alumno está en capacidad de explorar, reflexionar y generalizar. Parte del nivel referencial con una situación individual hacia un enfoque matemático.
- Formal: aplica procedimientos y notaciones convencionales.

Este proceso se presenta en dos dimensiones una horizontal y una vertical, como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1

Proceso de dimensionalidad horizontal y vertical

Dimensión horizontal	Dimensión vertical
• Está relacionado con el nivel situacional • Identificar las matemáticas que son relevantes al problema. • Organizar la situación en contexto. • Uso de las herramientas matemáticas (intuición, observación, experiencia previa, etc.) • Identificar semejanzas con problemas conocidos. • Resolver la situación en contexto.	• Enfocado en los niveles referencial, general y formal. • Operar dentro de la matemática (esquematizando, simbolizando y generalizando) para llegar a la formalización. • Utiliza representación y modelos, mediante la integración de los mismos. • Llega a la generalización a través de la argumentación.

- Convierte un problema contextual en un problema matemático.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.

Nota: Elaboración propia (2022)

Los cambios entre los niveles se dan básicamente por los modelos y la reflexión, siendo éstos, expresiones de los eventos donde se reflejan los conceptos y relaciones matemáticas que son significativos para resolver las problemáticas presentadas. Los modelos evolucionan, aquellos que surgen en el nivel situacional ("modelos de" alguna situación específica), pueden irse vinculando a otras situaciones y a otros entornos, formándose nuevas realidades en sí mismos, como herramientas ("modelos para") que resuelven otras situaciones, facilitando el ascenso hacia un razonamiento matemático formal, (Bressan et al., 2004)

El análisis reflexivo se muestra en el trabajo oral y escrito de los alumnos, en la habilidad del estudiante para crear procesos de esquematización, para la formalización progresiva, para crear estructuras en torno a las soluciones, que conlleva a la generalización y formalidad.

e. Principio de interacción: La interacción horizontal (entre estudiantes) y la interacción vertical (entre docentes y estudiantes) motivan a la reflexión alcanzando progresivamente mayores niveles de comprensión. En esta etapa los estudiantes explican, justifican, discrepan y reflexionan.

Este principio evidencia que para la EMR el aprendizaje se da como una actividad de grupo donde se discute un problema planteando distintos procedimientos, justificando soluciones y adaptándolas de forma eficiente. Esta interacción estimula la reflexión y capacita al alumno para alcanzar los niveles de comprensión.

f. Principio de interconexión: Abordar situaciones contextualizadas exige establecer conexión entre los conocimientos matemáticos previos adquiridos relacionados con la situación presente. Busca integrar diferentes ejes de la matemática promoviendo un variado rango de comprensión y herramientas matemáticas.

La interrelación o entrecruzamiento de la matemática con otras áreas del conocimiento, se basa en la selección de "buenos" problemas, aquellos, que son accesibles a todos los alumnos, y ofrecen distintos niveles de desafío, así como, de

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

aceptar variadas estrategias de resolución desarrollando la creatividad (Gallego y Pérez, 2013).

Los nexos entre los principios pretenden desarrollar el entorno matemático del alumno, como se observa en la figura 1, los principios de actividad y realidad forman la base del proceso de aprendizaje y los principios de reinvención guiada, interacción e interconexión se entrelazan para constituir y fortalecer el razonamiento formal matemático bajo el esquema de principio de niveles.

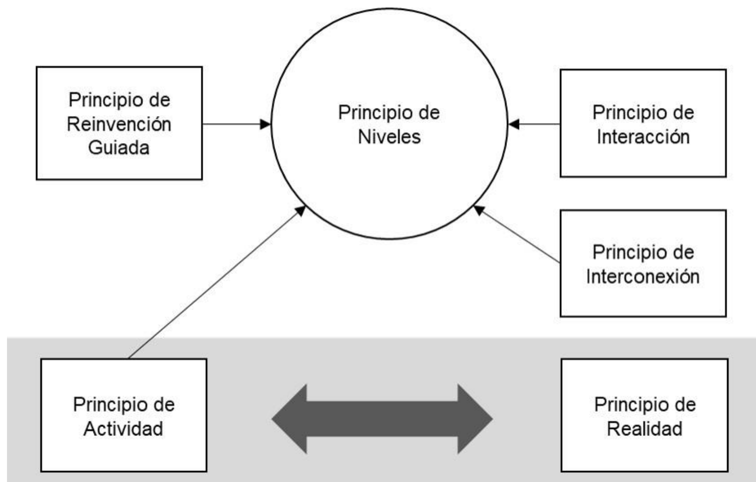

Figura 1. Interacción entre los principios de la EMR
Nota: Elaboración propia (2022)

Estos principios de la educación matemática realista se fundamentan en despertar el interés del alumno para explorar el camino de las matemáticas, ese camino que inicia en una actividad que puede ser imaginada por el alumno, luego transformada en reglas y en estructuras que evolucionan a momentos de abstracción ascendente formando una jerarquía del conocimiento ya distante de la actividad que lo originó.

En consecuencia, la matematización implica traducir problemas del entorno real-imaginario al mundo de las matemáticas, de tal forma que el alumno, en su andar, continúe el proceso y genere la habilidad y capacidad de utilizar conceptos y destrezas matemáticas.

Proyecto matemáticos realistas y modelización matemática

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

UNIVERSIDAD Rafael Belloso Chacín
REDHECS

El proyecto matemático y la modelización matemática, son los eventos que marcan el inicio y el fin de la matematización bajo el esquema de la educación matemática realista. El primero sustentado en el docente y el segundo en el alumno.

Los proyectos matemáticos realistas (PMR) se enmarcan en la capacidad que debe poseer el maestro para crear problemas situacionales que sean matematizable. Según Giménez et al. (2004), esto se logra a través de:

- Plantear preguntas o problemas de una misma situación.
- La situación inicial ser real y dinámica.
- Reconocer la secuencia de complejidad del proceso y dificultad creciente.
- Invitar a los estudiantes a profundizar y centrarse en los procesos y patrones de cambio, la variedad de relaciones y patrones para comprobar la validez de las respuestas.

El objetivo es observar el entorno del estudiante y generar un contexto situacional que sea de interés al estudiante motivándolo a conectar el problema real con el mundo matemático. Una de las fases relevantes en la interacción entre proponer una actividad (real o imaginaria) y la formalización de la matemática es la modelización, con ésta se logra que el alumno avance progresivamente en los conceptos matemáticos, constituyéndose estos conceptos en las bases para los conocimientos futuros.

La modelización matemática, “es el proceso de describir en términos matemáticos un fenómeno real, obteniendo resultados matemáticos mediante la evaluación e interpretación matemáticas de una situación real” (Gómez-Chacón y Maestre, 2008, p. 110). Para dichos autores, el proceso de modelización se desarrolla atendiendo los siguientes pasos:

1. Seleccionar una problemática del contexto.
2. Identificar elementos significativos y expresarlos en términos matemáticos.
3. Recurrir a análisis matemático para obtener resultados matemáticos.
4. Analizar y evaluar resultados matemáticos obtenidos para ver cómo afectan el mundo real.

El desarrollo de la capacidad de la modelización matemática requiere el adiestramiento de la creatividad, la habilidad para integrar conceptos y ser crítico, de

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

esta forma, se logra aplicar los conceptos matemáticos y valorar el poder de los mismos.

Software como herramienta educativa en la solución de problemas matemáticos

La tecnología de la informática es una poderosa herramienta que facilita la participación e interacción entre la estimulación sensorial y la capacitación en el conocimiento abstracto. Dentro de las funciones del lenguaje informático se encuentra la reconstrucción de la realidad conectando al usuario con su entorno. Los softwares, son diseñados para el trabajo lógico-matemático que estimula y consolida el desarrollo cognitivo del alumno.

> Incorporar la tecnología de información y comunicación (TIC) en las matemáticas asegura que el estudiante potencie su capacidad crítica y analítica ante la resolución de problemas y construcción de procesos matemáticos, desarrollando así el pensamiento y por ende las competencias matemáticas, es ahí donde entra la aplicación del software dinámico, interactivo, entretenido y atractivo (Mora, 2020, p. 72).

El software como herramienta sirve de apoyo a los procesos (Hernández, 2005), se reducen los tiempos de cálculo facilitando al alumno aplicar los conceptos, buscar estrategias para resolver problemas y relacionar los conocimientos adquiridos con otros campos de investigación.

Para los especialistas en neuropsicología, el cerebro tiene dos zonas: frontal y posterior; la parte frontal del cerebro, requiere gran atención y esfuerzo, cuando se enfrenta a un conocimiento matemático desconocido. La parte posterior del cerebro, guarda los datos conocidos y permite el acceso a ellos de forma rápida. Bajo este enfoque el software se puede usar como una herramienta para consolidar el conocimiento nuevo y transformar, mediante la repetición, lo desconocido en conocido. En la actualidad son varios los algoritmos computacionales usados como herramientas en la solución de problemas matemáticos, estos, pueden ser manejados en los distintos niveles de educación. Dentro de los algoritmos se tiene:

a. Winplot: (https://winplot.softonic,com/)

El Winplot, es un programa digital diseñado por Richard Parris,

> para el estudio visual de una serie de ecuaciones matemáticas…se puede generar gráficas de ecuaciones explicitas, paramétricas, implícitas y cilíndricas, generar curvas simples, tubos e incluso representar ecuaciones

diferenciales tanto en dos como en tres ejes (2D y 3D) (Herramientas educativas de funciones gráficas; 2011, párr.1)

b. Geogebra: (https://www.geogebra.org/)

Geogebra, es una herramienta digital diseñada para apoyar clases interactivas. Se define como un procesador geométrico y algebraico, que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, el entrenamiento algebraico, el cálculo de funciones reales, derivadas e integrales y también aborda el área de estadística.

c. Maxima: (https://maxima.sourceforge.io/es/)

Maxima, es un lenguaje de programación descendiente de Macsyma. Es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluye diferenciación, integración, expansión en Serie de Taylor, Transformada de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, sistema de ecuaciones lineales, vectores, matrices y tensores. Produce resultados de alta precisión, puede realizar graficas de funciones y datos en dos y tres dimensiones.

d. Octave: (https://octave.org)

Octave o GNU, como también es llamado, forma parte del proyecto GNU (Sistema operativo de Software libre) y es considerado el equivalente libre de Matlab. Es un lenguaje de programación creado para realizar cálculos numéricos y permite ejecutar ordenes en modo interactivo.

Su lenguaje puede ser extendido con funciones y procedimientos por medio de módulos dinámicos. Se entrelaza con otros programas GNU para crear gráficos (Grace). Permite trabajar con matrices, funciones, cálculos y toolbox. Contiene un directorio de órdenes que puede ser usado para editar programas y/o crear funciones.

e. Maple: (https://www.maplesoft.com)

El Mathemathic pleasure (Maple), es un programa dirigido a la resolución de problemas matemáticos que contiene un lenguaje simbólico y algebraico, diseñado para el cálculo computacional. Es un lenguaje de programación interpretado donde las expresiones simbólicas son almacenadas en memoria.

f. Matlab: (https://www.mathworks.com)

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Matrix laboratory (Matlab), es un sistema numérico computacional que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio, que es interpretado y puede ejecutarse tanto en el ambiente interactivo como a través de un archivo de script (archivos *.m). Permite trabajar con operaciones de vectores, matrices, funciones, calculo y programación orientada a objetos. También posee funciones y herramientas para visualizar datos en dos y tres dimensiones (2D y 3D). Dispone de Simulink (plataforma de simulación multidominio) y GUIDE (editor de interfaces de usuario GUI).

Planteamiento y desarrollo de un problema de ecuaciones diferenciales

En esta sección, se plantea un problema situacional bajo el enfoque de los principios de la EMR, el cual es diseñado para incursionar en los conceptos de ecuaciones diferenciales ordinarias, específicamente en una ecuación lineal de orden uno; durante el proceso, se hace uso del lenguaje computacional Maxima mediante la construcción de rutinas interactivas que sirve de soporte en el aprendizaje de las EDO. Es relevante, aclarar que este ejemplo de enseñanza, es realizado de forma hipotética, parte de la reflexión como investigador, no ha sido planteado en un salón de clase. Basado en la experiencia, se expone como avanza el proceso de enseñanza y aprendizaje en un contexto situacional.

Previo al planteamiento del problema, es conveniente tener presente que el alumno está familiarizado con las definiciones de ecuaciones, de derivada e integración de funciones. La situación problema se enmarca en un ambiente físico-químico, donde se plantea la visita a una empresa industrial, con el objetivo que el alumno observe el tratamiento de limpieza de una laguna artificial, que es usada como descarga de sustancias químicas en un proceso industrial. Esta actividad, permite al alumno conectarse e interactuar con su entorno.

La laguna, tiene instalada dos sistemas de tuberías, una de entrada, que lleva las sustancias químicas del proceso, y otra de salida, que sirve de drenaje durante el proceso de limpieza. El sistema de entrada contiene una válvula que regula el paso

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

del líquido hacia la laguna y un flujometro[1] para medir la velocidad del líquido que entra a la laguna. El sistema de salida contiene una bomba de drenaje, que suministra una velocidad de salida fija.

La laguna artificial tiene instalado un sistema de medida volumétrico, que permite saber la cantidad de volumen que contiene en cualquier momento. Esta laguna tiene valores fijos para el volumen mínimo y máximo. Dentro de la laguna se encuentra instalado un mecanismo de movimiento que es usado para mantener la mezcla homogénea, es decir, evita que la sustancia química se sedimente en el fondo de la laguna.

En este problema situacional, el alumno puede formular un conjunto de preguntas exploratorias que discutirá junto a sus compañeros y con el docente, tales como:

- ¿Qué cantidad de sustancia química debe contener la laguna para que se haga la limpieza?
- ¿Qué cantidad de sustancia química entra a la laguna por la tubería?
- ¿Cuál es el volumen mínimo y el volumen máximo de la laguna?
- ¿El proceso de descarga química se detiene para realizar la limpieza?
- ¿Cuál es el volumen de la laguna cuando se inicia el proceso de limpieza?
- ¿Cuánto tiempo transcurre para que la laguna se considere libre de la sustancia química?

Durante la visita, los empleados de la industria dieron respuesta a las preguntas de los alumnos y suministraron, además, un conjunto de datos, por cuatro semanas, que indicaban las cantidades de sustancia química que contenía la laguna registradas cada hora.

En el salón de clase, el profesor guía al alumno para trabajar con la información que tienen de la visita a la empresa, mediante una lluvia de ideas, los alumnos se motivan a dibujar un esquema de los elementos de la laguna (Ver figura 2), y realizan gráficas de los datos, con el uso del software, cantidad de sustancia química versus tiempo, y cantidad de sustancia química versus volumen.

[1] Flujometro o rotámetro: es un instrumento utilizado para medir el caudal, la velocidad o la fuerza de los líquidos o gases que se encuentran en movimiento con base en la graduación y aplicación de los mismos.

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

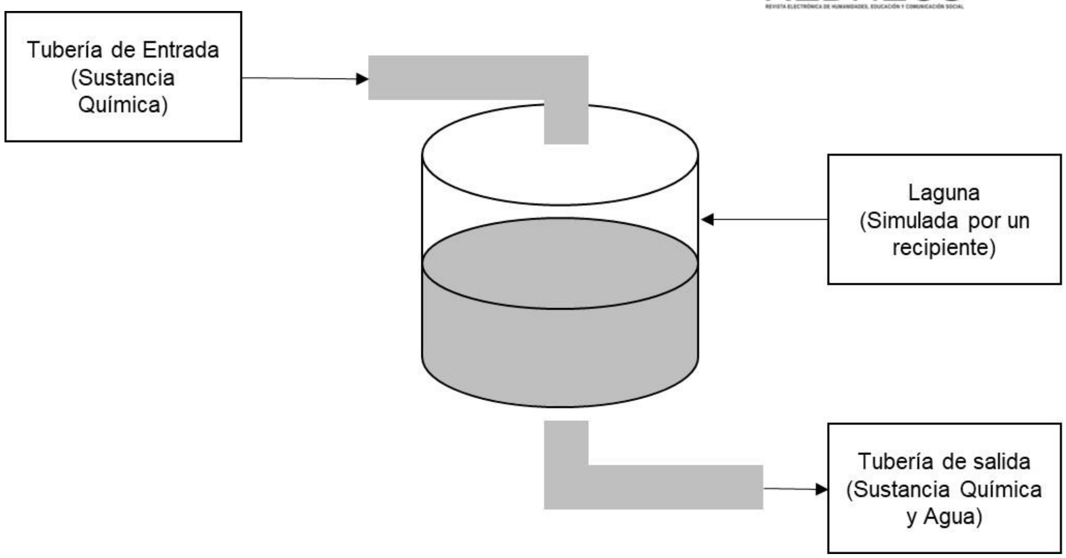

Figura 2. Esquema de la laguna y sus elementos
Nota: Elaboración propia (2022).

En cada paso el estudiante reflexiona y argumenta ante sus compañeros sobre la actividad que realizó y que herramienta de la matemática uso, comparando las gráficas con los otros estudiantes, y con el apoyo del profesor, observa que el comportamiento es similar, generando un modelo gráfico.

El profesor motiva al alumno a profundizar en el análisis de los datos, hasta que éste, descubre que durante el proceso de limpieza la cantidad de sustancia varia en el tiempo y observa en las gráficas que la sustancia química desciende hasta desaparecer. En este momento, el alumno considera que el problema puede formularse como una ecuación en derivadas, llegando así a un modelo de formula. Utiliza conocimientos matemáticos, avanzando en la matematización horizontal y vertical del problema.

En esta etapa, el alumno discute con sus compañeros y con el docente el problema situacional, abordando la solución del mismo bajo un enfoque matemático, justificando soluciones y adaptándolas de forma eficiente. Esta interacción permite, alcanzar niveles de comprensión.

El alumno, junto con sus compañeros, concluye que, para resolver el problema mediante la formulación de una ecuación en derivadas, debe, considerar que está analizando una mezcla de una sustancia química que es depositada en un recipiente con agua, la cual, entra con una velocidad y una concentración (cantidad de sustancia por volumen) y sale del recipiente, con otra velocidad y concentración (Ver figura 2).

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Se establece una interrelación entre la disciplina de química, el conocimiento matemático y la situación problema. Existe interconexión entre diferentes disciplinas y ejes matemáticos.

Además, analiza el problema y concluye que el avance del proceso de limpieza de la laguna se puede medir con la cantidad de sustancia que va quedando a medida que transcurre el tiempo. En este momento es capaz de plantear un modelo del problema:

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

Presenta como posible notación:

x: *cantidad de sustancia*

t: *tiempo*

E: *lo que entra al recipiente*

S: *lo que sale del recipiente*

$\frac{dx}{dt}$: *variación de la sustancia en el tiempo*

Reflexiona y adapta el modelo a la información que tiene:

$$\frac{dx}{dt} = c_e v_e - c_s v_s$$

Asume como notación:

x: *cantidad de sustancia*

t: *tiempo*

c_e: *concentración de entrada*

v_e: *velocidad de entrada*

c_s: *concentración de salida*

v_s: *velocidad de salida*

Con la asistencia del profesor, el estudiante determina en el modelo planteado, que la velocidad de entrada y salida y la concentración de entrada son valores fijos y que la concentración de salida no es constante. Reflexiona y usando su conocimiento en química y establece que:

$$c_s = \frac{x}{V} \qquad V = V_i + (v_s - v_e)t$$

La anotación es:

c_s: *concentración de salida*

x: *cantidad de sustancia*

V: *volumen del recipiente*

V_i: *volumen inicial en el recipiente*

v_e: *velocidad de entrada*

v_s: *velocidad de salida*

t: *tiempo*

También, repiensa sobre la solución del problema y considera que puede obtenerse integrando, para encontrar una expresión que le indique que cantidad de sustancia química va quedando en la laguna artificial al pasar el tiempo o como varia la cantidad de sustancia en el tiempo, aplicando el conocimiento que posee rescribe la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} + \left(\frac{v_s}{V_i + (v_s - v_e)t}\right) x = c_e v_e$$

Sustituye los valores numéricos dados en la empresa:

$$\frac{dx}{dt} + \left(\frac{5}{1000 + (2)t}\right) x = 150$$

Para encontrar la solución, reflexiona y con orientación del profesor, usa el software Maxima donde escribe en forma de algoritmo la ecuación, el software muestra la ecuación en estructura simbólica y obtiene la solución con el comando ode2 (Ver figura 3).

```
ec1:'diff(x,t,1)+(5/(1000+2·t))·x−150
;
```

$$\frac{d}{d\,t}\,x + \frac{5\,x}{2\,t+1000} - 150$$

```
ode2(ec1, x, t);
```

$$x = \%e^{-\frac{5\log(2\,t+1000)}{2}}\left(\frac{150\,\%e^{\frac{7\log(2\,t+1000)}{2}}}{7} + \%c\right)$$

Figura 3. Solución de una ecuación diferencial ordinaria con el software Maxima. Problema de la laguna artificial

Nota: Elaboración propia (2022)

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Considera que inicialmente existe 100 gramos de sustancia (tomado del conjunto de datos de la empresa), usando Maxima, resuelve el problema de valor inicial con el comando solve para obtener la solución a la ecuación anterior (Ver figura 4).

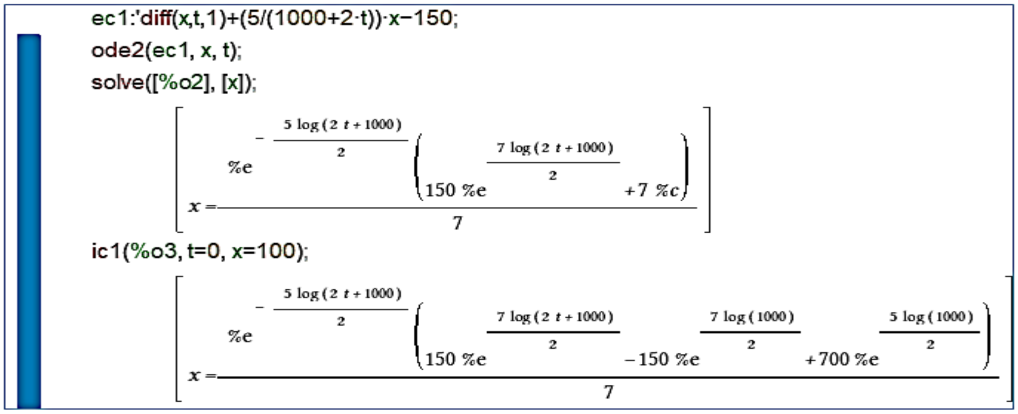

Figura 4. Solución de una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial usando el software Maxima. Problema de la laguna artificial
Nota: Elaboración propia (2022)

El estudiante, aplica Maxima y repite varias veces el proceso de resolver la ecuación, en cada caso, cambia los valores de la misma, tomándolos del conjunto de datos suministrados en la empresa. Construye una rutina con el software y obtiene el modelo matemático que da solución al problema particular planteado.

En esta etapa, el docente puede proponer otros problemas que se resuelvan de forma similar. Por ejemplo, puede plantear al alumno la caída de un cuerpo desde una altura, indicando que el cuerpo cae por su peso y que el aire opone resistencia a la caída del cuerpo.

El alumno, repiensa el planteamiento del problema y determina que se desea saber cómo varia la velocidad del cuerpo en el tiempo. Considerando como influye el peso del cuerpo y la resistencia del aire, concluye, que puede aplicar la segunda ley de Newton[2] para obtener la velocidad que lleva el cuerpo en cualquier momento, construyendo de esta manera el siguiente modelo:

$$m * a = m * g - k * v \qquad \text{Con } a = \frac{dv}{dt}$$

[2] Segunda Ley de Newton: indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, la fuerza neta es proporcional aceleración a, con más propiedad $\sum F_k = m * a$, donde m es la masa del cuerpo.

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Queda:

$$m * \frac{dv}{dt} = m * g - k * v$$

Reacomodando:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

Usando como anotación:

m: $masa\ del\ cuerpo$

a: $aceleración$

g: $gravedad$

k: $constante\ de\ proporcionalidad$

v: $velocidad\ instantanea$

t: $tiempo$

$\frac{dv}{dt}$: $variación\ de\ la\ velocidad\ en\ el\ tiempo$

Esta ecuación, es reconocida por el alumno y conoce su solución aplicando el software Maxima como se muestra en la figura 5.

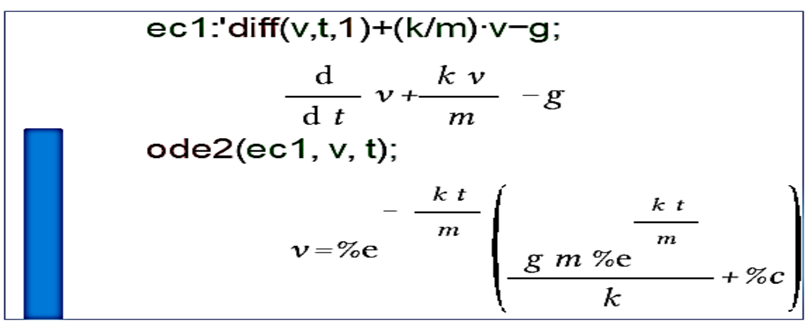

Figura 5. Solución de una ecuación diferencial ordinaria con el software Maxima. Problema de caída de un cuerpo desde una altura.
Nota: Elaboración propia (2022)

Puede considerar que inicialmente el cuerpo cae desde una altura de 9 metros por minuto, obteniéndose la solución del problema inicial con uso de Maxima (Ver figura 6).

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

```
ec1:'diff(v,t,1)+(k/m)·v−g;
ode2(ec1, v, t);
solve([%o11], [v]);
ic1(%o12, t=0, v=9);
```

$$\left[v = \frac{\%e^{-\frac{k\,t}{m}}\left(g\,m\,\%e^{\frac{k\,t}{m}} - g\,m + 9\,k\right)}{k} \right]$$

Figura 6. Solución de una ecuación diferencial ordinaria con el software Maxima. Problema de caída de un cuerpo desde una altura
Nota: Elaboración propia (2022)

Dando diferentes valores a k, m, g en la ecuación diferencial puede obtener sus respectivas soluciones mediante el uso del software Maxima con la rutina planteada en el ejercicio de situación anterior. Se crea un modelo matemático con herramienta de software.

El alumno, junto con sus compañeros ha explorado, reflexionado, esquematizado y creado modelos para situaciones particulares, está en capacidad de pasar del nivel referencial al general. El profesor, guía al alumno, mediante una serie de preguntas, que lo induce para observar y caracterizar la ecuación diferencial.

En un enfoque matemático formal, se llega a la definición de ecuación diferencial ordinaria lineal de orden uno con problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + g(x)y = f(x) \\ \qquad y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Es una ecuación diferencial de primer orden, con variable independiente x, y variable dependiente y, con coeficientes que son constantes o funciones que dependen de la variable independiente, acompañada con la condición inicial (x_0, y_0). Su solución usando Maxima con los comandos ode2 para obtener la solución en estructura simbólica se muestra en la figura 7.

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

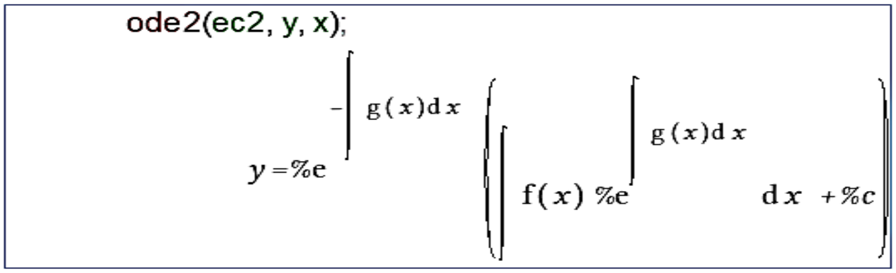

Figura 7. Solución de una ecuación diferencial ordinaria usando el software Maxima. Formulación general.
Nota: Elaboración propia (2022)

Evaluando la condición en (x_0, y_0) para dar solución al problema de valor inicial con el uso de Maxima, ver figura 8, con el comando solve.

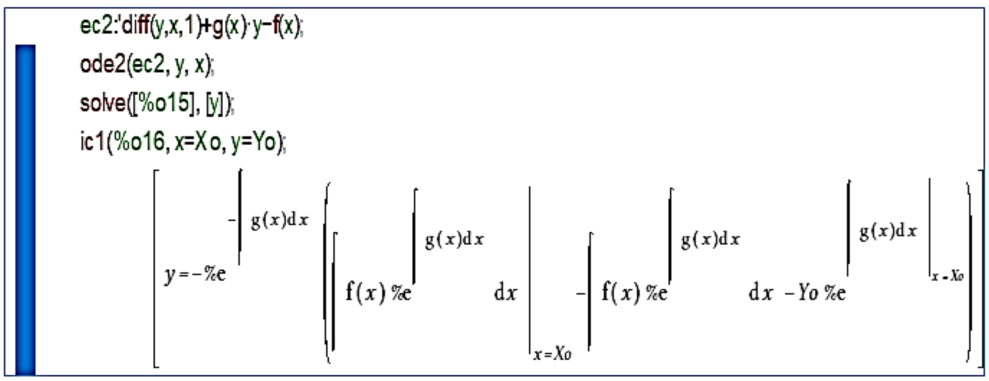

Figura 8. Solución de una ecuación diferencial ordinaria usando el software Maxima. Formulación general.
Nota: Elaboración propia (2022)

Avanzando en el proceso formal matemático se explica al alumno el procedimiento para llegar a la solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal de orden uno con valor inicial:

Recordar que en calculo diferencial para una función $z = F(x, y)$, con primeras derivadas continuas en una región R del plano xy, su diferencial total o exacta es:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Si $z = c = F(x, y)$ entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Con derivadas mixtas iguales: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

UNIVERSIDAD Rafael Belloso Chacín
REDHECS
Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Invirtiendo el proceso se puede establecer que dada la ecuación diferencial total, su solución será la función $F(x,y)=c$.

Reescribiendo (1):

$$[g(x)y-f(x)]dx+dy=0 \qquad (2)$$

Donde: $\frac{\partial F}{\partial x}=g(x)y-f(x)$ $\quad y \quad$ $\frac{\partial F}{\partial y}=1$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}=g(x) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=0$$

Como las derivadas mixtas no son iguales, se tiene que (2) no es una diferencial total, de forma que debe convertirse en una ecuación diferencial total para poder encontrar la solución $F(x,y)=c$

Para transformar a (2) en una ecuación diferencial exacta se multiplica por $\mu(x)$, que recibe el nombre de factor integrando.

$$\mu(x)[g(x)y-f(x)]dx+\mu(x)dy=0$$

Se igualan las derivadas mixtas para encontrar a:

$$\mu(x)=e^{\int g(x)dx}$$

Multiplicando (1) por $\mu(x)$ queda:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)g(x)y=\mu(x)f(x)$$

Sustituyendo $\mu(x)$ y reescribiendo la ecuación queda:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int g(x)dx}\right)=f(x)e^{\int g(x)dx}$$

Despejando la variable dependiente:

$$y=e^{-\int g(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int g(x)dx}dx+c\right)$$

En este momento el alumno reconoce que la solución obtenida es la misma que la encontrada con el software Maxima. Por último la condición de problema de valor inicial se sustituye en la solución para encontrar el valor de la constante de integración c.

Los principios de actividad y realidad se hacen presente en el planteamiento del problema situacional de la laguna artificial, estableciendo una tarea real de interés para el alumno, donde observa, reflexiona y discierne sobre el problema de forma individual, interactuando con sus compañeros y profesor.

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Haciendo uso del conocimiento matemático que el alumno posee y conectando éste con otras áreas como la química y la física, y con la asesoría del profesor, el estudiante mediante la matematización logra formular modelos matemáticos que lo lleva a resolver el problema.

La matematización desarrolla en el estudiante la habilidad de resolver otros problemas situacionales reales o imaginados por él, donde se usa procedimientos similares para llegar a la solución del problema, como en el caso del cuerpo que cae de una altura.

El software Maxima sirve de herramienta para que el alumno visualice simbólica y numéricamente el modelo matemático, así como su solución. Además, facilita al alumno resolver en un tiempo corto la ecuación diferencial formulada para el problema cuando experimenta cambiando los datos.

Se consolida los conceptos matemáticos en el alumno con la generalización y formalización de la definición y procedimiento de solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden con condición de valor inicial. Este enfoque matemático formal será la puerta de entrada para que el alumno explore el concepto de ecuación diferencial ordinaria lineal de orden mayor a uno.

Conclusión

La didáctica realista invita al alumno a construir los conceptos y procedimientos matemáticos a partir de la reflexión sistemática, de la interacción con sus pares y con el docente, interconectando diferentes áreas del conocimiento a través del uso de fenómenos imaginables o reales. Busca una integración del alumno con su entorno social.

La aplicación de los principios de la educación matemática realista motiva al alumno a enlazarse con el hacer del problema, matematizando un evento real que le permite fijar a través del contexto el conocimiento.

El software al ser un lenguaje lógico-simbólico-numérico se convierte en una herramienta poderosa que facilita la comprensión del conocimiento abstracto a partir de la estimulación sensorial. Aporta dinamismo al proceso de generalización y formalización de la matemática.

UNIVERSIDAD Rafael Belloso Chacín
REDHECS

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023

Cuando el alumno se enfrenta a crear nuevos modelos y estrategias de resoluciones similares a las presentadas en el salón para resolver proyectos particulares refuerza su nivel de comprensión y desarrolla la capacidad de formalizar los conceptos matemáticos estudiados.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2009). El Aprendizaje Realista: Una Contribución de la Investigación en Educación Matemática a la Formación del Profesorado. *Investigación en Educación Matemática XIII,* 119-127. https://www.seiem.es/docs/actas/13/SEIEMXIII-AngelAlsina.pdf

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2004). I Parte: La Educación Matemática Realista. Principios en que se Sustenta. *Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática*. https://docplayer.es/163444334-I-parte-la-educacion-matematica-realista-principios-en-que-se-sustenta.html

Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny, J. (2015). Modelización matemática en la educación matemática realista: una propuesta para contribuir a la construcción formal de álgebra lineal. *Jornada sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.* https://17jaem.semrm.com/aportaciones/n84.pdf

Gallego, M. y Pérez, S. (2013). Aporte "Realistas" a la Educación Matemática. Una propuesta para repensar la enseñanza de la matemática desde el enfoque didáctico de la educación matemática realista. *Desde la Patagonia difundiendo sabers. 10* (16). 1-19. https://revele.uncoma.edu.ar/index.php/desdelapatagonia/article/view/3863/60870

Geogebra (s/f). https://www.geogebra.org/

Giménez, J., Santos, L. & Da Ponte, J. (2004). La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes. *ResearchGate.* https://www.researchgate.net/publication/39209812_La_actividad_matematica_en_el_aula_Homenaje_a_Paulo_Abrantes

Gómez-Chacón, I. y Maestre, N. (2008). Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. *Experiencia de aula y propuestas didácticas. 17* (1). 107-121. https://acortar.link/ZEnlkS

Gravemeijer, K., & Teruel, J. (2000). Hans Freudenthal: A Mathematician on Didactics and Curriculum Theory. *Journal Curriculo Studies,* 32 (6), 777-796. Traducido por: Saggesse, N., Gallego, F., &Bressan, A. Hans Freudenthal: Un Matemático en Didáctica y Teoría Curricular. https://research.vu.nl/ws/files/1742515/JCSGravemeijer&Terwel2000.pdf

Gravemeijer, K. (2002). *Emergent Modeling as the Basis for an Instructional Sequence on Data Analisis*. ICOTS6. https://iase-web.org/documents/papers/icots6/2d5_grav.pdf?1402524960

Maple (s/f). https://www.maplesoft.com

Matlab (s/f). https://www.mathworks.com

Maxima (s/f). https://maxima.sourceforge.io/es/

Mora, J. (2020). Geogebra como herramienta de transformación educativa en matemática. *Mamakuna Revista de divulgación de experiencias pedagógicas.* 71-81. https://revistas.unae.edu.ec/index.php/mamakuna/article/view/349/402

Octave (s/f). Scientific Programming Language. https://octave.org

Pérez, A., Vásquez, N., Toledo, F., Alarcón, S. y Lagos, I. (2016). Educación matemática realista: un enfoque para la apropiación de aprendizajes significativos sobre funciones en tercer año medio. *XX Jornadas de Educación Matemática.* 316-319. http://funes.uniandes.edu.co/15506/1/Perez2016Educacion.pdf

Riveros, F., Vargas, J. y Parra, L. (2020). Educación matemática realista y entornos interactivos para determinar el nivel cognitivo de estudiantes universitarios a partir del concepto de la integral definida y sus aplicaciones en ingeniería. *Revista Espacios. 41* (26).357-370. https://www.revistaespacios.com/a20v41n26/a20v41n26p30.pdf

Rodríguez, E. (2013). Nociones de la teoría matemática realista. Ejemplo de ecuaciones diferenciales. *Revista electrónica de Humanidades, Educación y Comunicación Social (REDHECS). Universidad Dr. Rafael Belloso Chacín. 16* (9). 90-104. http://ojs.urbe.edu/index.php/redhecs/article/view/521

Winplot (2013). Comportamiento de funciones simples (incremento, valores límites, ceros, continuidad, periodicidad) desde su gráfica. https://winplot.softonic.com/

Depósito Legal: PPI 200802ZU2980 / ISSN: 1856-9331. Vol. 30. Núm. 21. (2022): Octubre 2022 – Marzo 2023