



Evaluación en los contenidos de ecuaciones diferenciales mediante competencias matemáticas

Evaluation of the contents of differential equations through mathematical competences

Analisi multivariato duale applicato ai risultati ottenuti una volta valutati i contenuti di Equazioni Differenziali secondo le competenze matematiche



Lisandro Curia.
Universidad Nacional del Comahue. Argentina
azzs_132@yahoo.com



Mónica Pérez.
Universidad Nacional del Comahue. Argentina
nomail@nomail.com



Andrea Lavalle
Universidad Nacional del Comahue. Argentina
lavalleandrea@yahoo.com.ar

Resumen

El objetivo de este trabajo es evaluar los resultados estadísticos que derivan de una investigación llevada a cabo con alumnos de las carreras de ingeniería en el curso de la asignatura análisis matemático III, al diseñar el modelo de enseñanza basado en competencias matemáticas y realizar evaluaciones prolongadas a lo largo de tres años, basándose en este modelo de enseñanza. El trabajo se fundamentó en las teorías de Boyce y DiPrima (1987), Niss (2002), Niss y Højgaard (2011), (Tobón, 2006) Curia y Lavalle (2014). La asignatura tiene modalidad de dictado cuatrimestral y comprende



exclusivamente contenidos de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales. Para la obtención de resultados se analizaron los puntajes obtenidos en los exámenes parciales durante tres dictados consecutivos. La metodología empleada fue la técnica de análisis multivariado para datos de conjuntos múltiples denominada análisis factorial múltiple dual. Los resultados muestran que a partir del modelo de enseñanza por competencias y la evaluación prolongada acorde con este modelo, las asociaciones entre las diferentes competencias se mantienen estables a lo largo del tiempo.

Palabras clave: Competencia matemática, evaluación, análisis factorial múltiple dual.

Abstract

The objective of this work is to present the statistical results that derive from a research carried out with students of engineering careers in the course of Mathematical Analysis III. The teaching model used is based on mathematical competences, and prolonged evaluations were carried out over three years, based on this model. The signature has a four-month dictation modality and exclusively includes contents of differential equations, both ordinary and partial. To obtain results, the scores obtained in the partial exams were analyzed during three consecutive dictations. The Multivariate Analysis technique was used for multiple set data called Dual Multiple Factorial Analysis. The results show that from the model of teaching by competences and the prolonged evaluation according to this model, the associations between the different competences remain stable over time.

Keywords: Mathematics competencies, evaluation, dual Multiple factorial analysis.

Riassunto

L'obiettivo di questo lavoro è stato presentare i risultati statistici derivati da una ricerca fatta con gli studenti delle carriere di Ingegneria, nel corso della materia Analisi Matematico III. Si è disegnato un modello d'insegnamento basato in competenze matematiche, e si sono fatte delle valutazioni lungo tre anni, considerando questo modello di insegnamento. La ricerca è basata in Mogens Niss (1999). La materia viene dettata quadrimestralmente ed ha esclusivamente i contenuti delle equazioni differenziali ordinarie come parziali. Per ottenere i risultati, si sono analizzati i punteggi ottenuti nelle prove parziali durante tre periodi dettati consecutivi. Si è usata la tecnica di analisi multivariato per dati di insiemi molteplici denominata analisi fattoriale multipla duale. I risultati mostrano che dal modello di insegnamento per competenze e la valutazione prolungata secondo questo modello, le associazioni tra le diverse competenze si mantengono stabili nel tempo.

Parole chiave: Competenza matemtica, valutazione, analisi fattoriale multipla duale.



Introducción

Las ecuaciones diferenciales constituyen una rama de la matemática que aporta conocimientos indispensables a los estudiantes, tanto teóricos como prácticos, particularmente a aquellos que cursan carreras de ingeniería. Sus aplicaciones a las diversas ciencias implican un compromiso del alumno que como parte de su tarea tiene inicialmente que escribir el modelo matemático que describe el fenómeno, el que en numerosos casos se traduce en una ecuación diferencial, resolverlo y posteriormente interpretar los resultados en el contexto del fenómeno que modeló.

Aquí podemos distinguir tres habilidades, Boyce & DiPrima (1987):

- Manejo de conocimientos previos de cálculo diferencial e integral.
- Capacidad de modelización de fenómenos que surgen de las distintas disciplinas.
- Habilidades para el manejo algebraico y resolución de las ecuaciones diferenciales resultantes.

En consecuencia, esta disciplina presenta aristas de sumo interés por parte de investigadores de las áreas de didáctica y psicología del aprendizaje, ya que no sólo pone en juego la habilidad metodológica del alumno para resolver problemas y ejercicios, sino que también permite ver la forma en que el alumno plantea modelos matemáticos, construye un conocimiento cualitativo que le permita predecir el comportamiento de las soluciones.

En este sentido, cuando el alumno aborda el estudio de los contenidos referentes a ecuaciones diferenciales, aparecen términos como los de “comportamiento cualitativo de las soluciones”. Aquí se espera que el alumno analice las soluciones en lo referente a su comportamiento asintótico, por ejemplo, cuando t tiende a infinito o cuando t tiende a cero; reconocer si la solución permanece acotada con el transcurso del tiempo, o bien, si una solución diverge, por ejemplo en las cercanías del origen de coordenadas. En este caso, el alumno debe abordar la problemática del estudio de soluciones en torno a puntos



singulares de una ecuación diferencial, donde los métodos de resolución ya se tornan un tanto más complejos y se requiere el planteo de series y las regiones de convergencia se limitan a ciertos conjuntos de acuerdo al problema. Esto conlleva a que el investigador deba analizar no solo la destreza del manejo algebraico del alumno para resolver una ecuación sino también la capacidad de análisis y de cómo puede expresar su pensamiento utilizando propiedades, teoremas y simbología matemática.

Trabajos seminales como los de Artigue (1992) se ubican en este campo, donde la autora explora las características de la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias observando la tarea de docentes y alumnos cuando se analiza el comportamiento cualitativo de las soluciones. Por su parte, Habré (2000) busca determinar las estrategias que emplean los alumnos para resolver y analizar situaciones problemáticas en el campo de las ecuaciones diferenciales. Más recientemente, Guerrero Ortiz et al. (2010) plantean que aun cuando los estudiantes pueden resolver algebraicamente una ecuación diferencial, no pueden justificar mediante alguna estrategia matemática lo que observan sobre el comportamiento de las soluciones a partir de su representación gráfica. En el trabajo de Zang et al. (2013), basado en el estudio de errores, se detalla que existen obstáculos referidos a la formalización de nociones básicas como las de función, derivada y ecuación. Asimismo, encuentran dificultades en el trazado de la curva solución, en la aplicación de métodos algebraicos de resolución y en la validación de resultados.

Camacho et al. (2007) determinaron que los alumnos mayormente conciben la resolución de una ecuación diferencial como una actividad meramente mecánica consistente en aplicar un determinado método de resolución a una ecuación diferencial particular, quedando excluido de esta actividad los aspectos que derivan del análisis del problema y de la crítica de la solución. En consecuencia se vuelve a insistir en que no debe perderse de vista que gran parte de los modelos matemáticos que parten de ejemplos prácticos concretos, conducen al establecimiento de identidades donde las magnitudes que intervienen experimentan cambios con el tiempo. Por lo tanto, surgen del estudio de estos fenómenos, ecuaciones que contienen derivadas, esto es, ecuaciones



diferenciales.

Al analizar cómo el alumno responde a esta problemática se espera que no sólo incluya fórmulas de resolución, sino que conciba el problema de manera integral, utilizando el lenguaje propio de las ecuaciones diferenciales y traduzca en términos coloquiales lo que figura escrito en símbolos matemáticos como la solución de la ecuación diferencial.

Por tanto, si durante el trabajo con estas ecuaciones, sólo se espera que el alumno clasifique la ecuación diferencial y luego aplique el método de resolución correspondiente, quedarán marginados de la comprensión del alumno problemas de análisis y abstracción que en ocasiones superan en importancia la propia resolución de la ecuación. Este es el caso de las ecuaciones diferenciales autónomas, donde mayormente el alumno debe tratar de investigar cómo fluyen las soluciones y qué conclusiones trae este comportamiento antes que propiamente resolver la ecuación diferencial.

Comparando décadas pasadas con los últimos años, puede observarse cómo la bibliografía paulatinamente ha dedicado mucho espacio para que el alumno gane habilidades en la tarea de modelización y visualización de soluciones. Uno de los textos precursores en este sentido es debido a los autores Boyce y DiPrima (1978) y posteriormente otros autores como Nagle, Saff y Snider (2001), Edwards y Penney (1993) y Zill y Cullen (2014), quienes en sus últimas ediciones llegan a incluir el uso de software computacional que permite una visualización completa de las soluciones y posibilita que el alumno extraiga claras conclusiones acerca del comportamiento de las mismas.

Desarrollo

Es necesario que el docente incluya un modelo específico de enseñanza que se adapte al contenido de estos textos y que posibilite un conocimiento significativo relacionando, tal como mencionan Novak y Gowin (1988), los conocimientos previos con los nuevos e interpretando los resultados de manera no arbitraria ni mecánica. Complementariamente, el docente tiene que disponer de herramientas adecuadas que permitan focalizarse en los puntos que resultan relevantes para posteriormente evaluar.



Un enfoque que durante los últimos años aportó gran utilidad para construir modelos de enseñanza, es el de competencias matemáticas. Esta metodología fue presentada originalmente por Mogens Niss en 1999 y con el correr de los años muchos docentes e investigadores han recurrido a estas ideas para organizar y planificar sus prácticas docentes, Niss (2002); Niss & Højgaard, (2011). El concepto de competencia matemática se ha usado con distintas interpretaciones y diversos autores las han usado con mayor o menor flexibilidad, incluyendo algunas y descartando otras, de acuerdo a la estructura del problema en el que quieren focalizarse. Niss (2002), introdujo ocho competencias matemáticas:

Pensar matemáticamente

Se evalúa la capacidad del estudiante para conocer las limitaciones de los resultados que obtiene, generalizar resultados y propiedades, descubrir regularidades, distinguir entre distintos tipos de enunciados matemáticos ya sean estos provenientes de conjeturas, definiciones, hipótesis o teoremas.

Plantear y resolver problemas matemáticos

Consiste en la habilidad que tiene el estudiante para definir las variables que intervienen en un problema, plantearlo y finalmente resolverlo. Asimismo, se tiene en cuenta la capacidad de reconocer y plantear diferentes tipos de problemas matemáticos, ya sean estos de carácter teórico, práctico, abiertos o cerrados.

Modelizar matemáticamente

Consiste en la habilidad para traducir un problema de la vida real, que en ocasiones puede ser formulado verbalmente, a una o varias expresiones matemáticas. Es decir, la capacidad para traducir en términos algebraicos enunciados verbales propuestos en forma de frases coloquiales. Esta capacidad también está relacionada con analizar, fundamentar y extraer propiedades de los modelos matemáticos ya existentes.



Argumentar matemáticamente

Esta competencia se refiere a entender demostraciones y cadenas de razonamientos propios de la matemática. Comprende también la capacidad de justificar determinados procedimientos matemáticos, lo cual exige razonamiento lógico para descubrir, por ejemplo, las ideas básicas de la demostración de un teorema y sus corolarios, abordando las condiciones de necesidad y suficiencia, los encadenamientos y las consecuencias de determinado procedimiento desde el saber matemático.

Representar entidades matemáticas, situaciones y objetos

Aquí se incluye la capacidad para entender y emplear distintas representaciones de objetos matemáticos, también saber escoger entre varias representaciones, cuál de ellas se adecúa a la situación problemática que se plantea.

Utilizar símbolos matemáticos

Se refiere a la capacidad para trabajar con expresiones simbólicas y a traducir enunciados verbales a lenguaje simbólico formal. También esta competencia se relaciona con la interpretación que da el estudiante de los símbolos empleados comúnmente en el lenguaje formal de la matemática e incluye la habilidad con que pueda entender las reglas formales de este sistema.

Comunicarse matemáticamente y comunicar matemática

En sus aspectos más generales, esta competencia comprende las habilidades de entender textos con contenido matemático y saber expresarse en forma oral y escrita sobre temas específicamente matemáticos logrando distintos niveles de precisión en los escritos y enunciados orales.



Utilizar herramientas y nuevas tecnologías

Se incluye aquí la habilidad del estudiante para saber delimitar los alcances del empleo de estas tecnologías, su uso racional y las limitaciones, ventajas y desventajas que trae aparejado su empleo durante la actividad matemática.

Para poder utilizar una evaluación basada en competencias matemáticas, es necesario que durante el desarrollo de las clases se haya empleado una metodología acorde con lo que se quiere evaluar puesto que no tendría sentido hacer hincapié insistentemente en métodos de resolución de problemas y ejercicios contenidos en los trabajos prácticos para posteriormente evaluar problemas diferentes.

Por ello, las clases deben ser desarrolladas tratando de favorecer un aprendizaje significativo basado en problemas de resolución de ecuaciones diferenciales, manejo algebraico, y modelización matemática; y este enfoque es propicio para que el docente introduzca problemas de aplicación a las distintas ciencias que puedan ser descriptos matemáticamente a través de una ecuación diferencial. Siguiendo estas ideas, es conveniente que el docente haga hincapié durante el transcurso de las clases, no sólo en encontrar una solución, en el caso que se pueda, sino también completar el estudio en la pizarra graficando soluciones y explicando el comportamiento de las mismas recurriendo a un procedimiento cíclico en el que el modelo lleva a la ecuación diferencial y ésta a la solución y a su representación gráfica y recíprocamente, que las conclusiones que puedan extraerse del comportamiento gráfico de las soluciones concuerden con el modelo matemático, analizando si el lenguaje simbólico respeta el enunciado verbal del problema original.

Desde el punto de vista de la enseñanza por competencias, la evaluación consiste en "un proceso de retroalimentación mediante el cual los estudiantes, los docentes, las instituciones educativas y la sociedad obtienen información cualitativa y cuantitativa sobre el grado de adquisición, construcción y desarrollo de las competencias" (Tobón, 2006). Durante el proceso de evaluación por competencias es necesario que las actividades de resolución planteadas a los alumnos a través de problemas y ejercicios, proporcionen



evidencias y valoraciones, que pueden ser tanto cuantitativas como cualitativas, sobre los progresos de los estudiantes en función de los resultados esperados, tal como sostiene Valverde Berrosco et al., (2012). En este sentido, Moreno (2012) observa que, aunque pueden utilizarse dispositivos metodológicos que no son novedosos en sí mismos, en el contexto de la enseñanza por competencias estos dispositivos adquieren una perspectiva e intencionalidad diferente a la convencional.

Una característica esencial de la evaluación por competencias es que no se limita a la mera certificación de los aprendizajes de los estudiantes, esta perspectiva lleva implícito un proceso de retroalimentación mediante el cual los estudiantes pueden sacar conclusiones sobre el grado de desarrollo y maduración alcanzado, y los profesores consiguen información valiosa para reorientar y enriquecer sus estrategias de enseñanza y reconducir los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Esta investigación se enmarca en el trabajo realizado con estudiantes de la asignatura Análisis Matemático III de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue, en la que se desarrollan contenidos exclusivamente de ecuaciones diferenciales. Este estudio se llevó a cabo mediante un compromiso prolongado durante tres cursados de la asignatura (años 2016 y 2017) con el propósito de establecer relaciones entre las competencias analizadas y estudiar si estas relaciones son estables a lo largo del tiempo.

Para recolectar los datos se analizaron los resultados de los primeros parciales, es decir, que no se consignaron datos de la producción de alumnos sobre todos los contenidos de la asignatura. Los contenidos abarcados en esta evaluación son: ecuaciones diferenciales ordinarias, soluciones y problemas con valores iniciales, campo de direcciones, ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden, sustituciones y transformaciones, modelización matemática, métodos de resolución, wronskiano, dependencia lineal y conjunto fundamental de soluciones, consideraciones cualitativas para ecuaciones con coeficientes variables y no lineales.



De algún modo esta investigación permite analizar el modelo de enseñanza por competencias que se viene utilizando en el curso de ecuaciones diferenciales y es una continuación del trabajo “Análisis de una evaluación por competencias en matemática mediante Técnicas Multivariadas y Mapas Autoorganizados”, Curia y Lavalle (2014) realizado en este mismo contexto.

Materiales y métodos

La propuesta didáctica utilizada en el dictado de la asignatura consistió en mantener un compromiso prolongado privilegiando la metodología de enseñanza por competencias, proponiendo actividades tanto en los trabajos prácticos como en los problemas que se planteaban en la pizarra y que tuvieron por objeto que el alumno pueda relacionar contenidos transversales a través de problemas y ejercicios de aplicación multidisciplinarios, analizando cuestiones relativas al encadenamiento de razonamientos y símbolos matemáticos utilizados en las demostraciones de teoremas y corolarios, seguimiento constante de los estudiantes en la resolución de trabajos prácticos para analizar cómo responden e interpretan enunciados abstractos derivados, por ejemplo, de funciones especiales, y series de funciones.

De este modo, la metodología desarrollada en las clases teóricas y prácticas permite llevar adelante una evaluación basada en competencias. Asimismo, al ser desarrollada criteriosamente año tras año, aun con pequeñas desviaciones, pero manteniendo esta línea de trabajo con compromiso y constancia a lo largo del tiempo, constituye un factor habilitante que posibilita analizar el grado de desarrollo de las competencias a lo largo del tiempo. Las evaluaciones parciales utilizadas durante tres cursados continuados permitieron recabar la información para esta investigación.

En la primera columna de la Tabla 1 se presentan las competencias matemáticas abarcadas, en la segunda una descripción de las capacidades particulares evaluadas en este estudio, siguiendo un enfoque basado en el trabajo de Barbarán Sánchez y Fernández Bravo (2014) y de Niss (2002) y en la tercera columna se indica el ejercicio seleccionado para evaluar la competencia correspondiente.

Tabla 1: Capacidades evaluadas por competencia y ejercicio utilizado en la evaluación

Competencia	Capacidades	Ejercicio
C1: Pensar matemáticamente	Conocer el rango de validez de un resultado	4
C2: Plantear y resolver problemas matemáticos	Aplicar métodos de resolución	2
C3: Modelizar matemáticamente	Interpretar condiciones iniciales Analizar el modelo matemático Extraer propiedades del modelo	1b y 1c
C4: Argumentar matemáticamente	Justificar la elección de un resultado basándose en propiedades	3
C5: Representar entidades matemáticas, situaciones y objetos	Interpretar condiciones iniciales Graficar una curva continua Mostrar comportamiento asintótico	1a

Fuente: Elaboración propia (2017).

Para evaluar cada competencia se utilizó un puntaje de 1 a 10. En cada cuatrimestre de cursado se seleccionaron al azar 20 estudiantes, con lo cual resultó formada una base de datos de 60 estudiantes a los que se les evaluaron 5 competencias, es decir, una matriz de 60 filas y 5 columnas.

Se puede considerar que el conjunto de estudiantes está particionado en subgrupos de acuerdo al cursado en el que participaron. En este sentido, los datos obtenidos conforman una estructura conocida como “datos de conjuntos múltiples”, donde se cuenta con individuos (estudiantes), variables (competencias) y condiciones (cursados). Una de las técnicas de análisis multivariado utilizadas en este tipo de datos es el Análisis Factorial Múltiple Dual (AFMD), Lê et al. (2007); Lê y Pagès (2010).

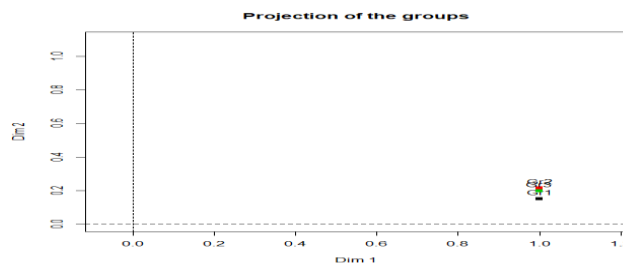
El objetivo del AFMD es analizar cómo se comportan las variables a lo largo de las condiciones. Se basa en la metodología clásica del Análisis de Componentes Principales

(ACP), por lo tanto, permite analizar las correlaciones entre las variables sobre la base de todos los individuos. Sin embargo, estas correlaciones no son necesariamente iguales de un grupo a otro. Es decir, podría ocurrir que las competencias se relacionen de diferente manera de acuerdo a cada grupo de estudiantes. Por lo tanto, surge la necesidad de estudiar las correlaciones inducidas por cada grupo. De esta manera el interés recae en el estudio del comportamiento de las variables definidas por cada grupo de individuos y en el análisis de la evolución de las variables a través de los grupos. Esta comparación de los coeficientes de correlación se facilita si se obtiene una representación simultánea de los gráficos de las variables definido por cada grupo de individuos, Lê et al. (2008). En consecuencia, el objetivo de este método es proveer un único marco de referencia donde estas comparaciones sean posibles. Los datos fueron procesados con el software libre, R Core Team (2018).

Resultados

El primer resultado obtenido a través de la aplicación del AFMD contribuye a analizar el comportamiento general de los tres cursados. En la Figura 1 se representa cada cursado con un punto. Se puede observar que los tres puntos tienen prácticamente la misma posición, por lo tanto, se evidencia un comportamiento similar de los tres cursados.

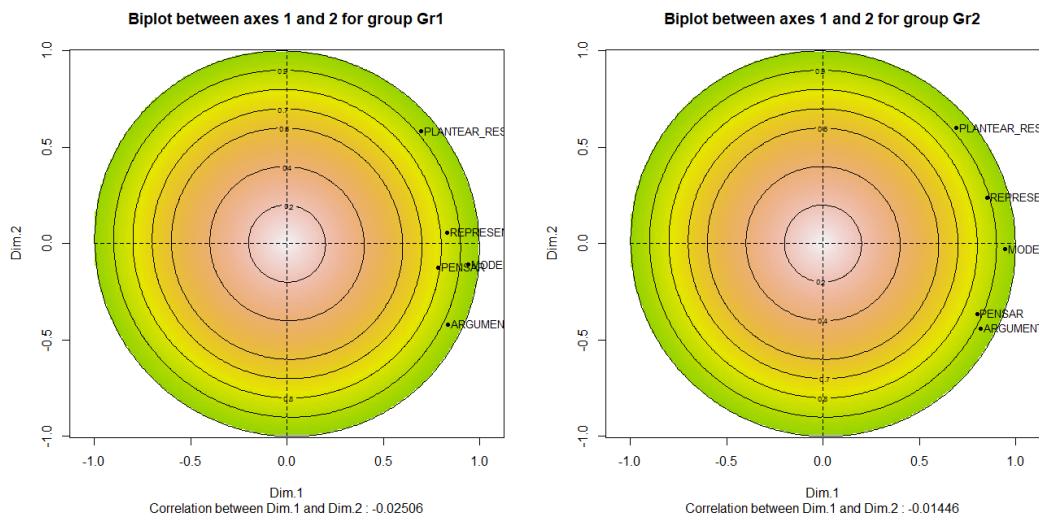
Figura 1: Proyección de los grupos de individuos del AFMD

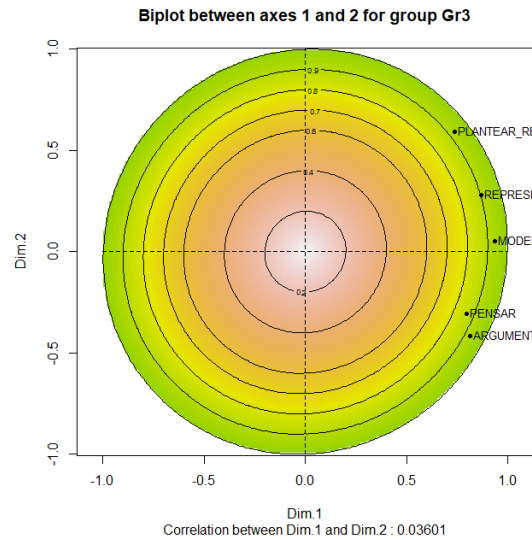


Fuente: Elaboración propia (2017).

La Figura 2 muestra los tres círculos de correlación en los que se representan las competencias en cada cursado. A partir de estos gráficos podemos corroborar que la estructura de relaciones entre las calificaciones de cada competencia, es la misma en los tres cursados analizados. Esto significa que la forma en que se relacionan las competencias es similar a lo largo del tiempo. Sin embargo se observa que en el primer cursado, la competencia “Pensar matemáticamente” se encuentra más asociada a “Modelizar matemáticamente”.

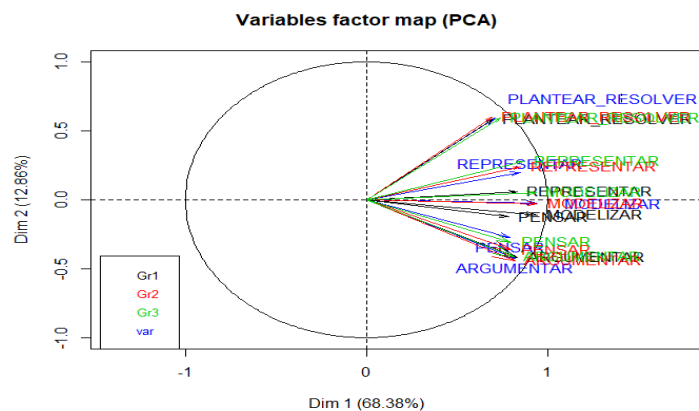
Figura 2: Círculos de correlación de cada cursado





En la Figura 3 se muestra el círculo de correlación en donde se representan todas las variables conjuntamente. En azul se indican las variables obtenidas del ACP de la tabla completa, mientras que en negro, rojo y verde, las de cada cursado individual. Si la relación entre dos variables es directa, el ángulo formado por las flechas que las representan es agudo; si la relación es inversa, el ángulo será obtuso y si es recto, las variables no tienen relación.

Figura 3: Variables en el círculo de correlación del AFMD



Fuente: Elaboración (2017).



Se observa una alta relación lineal directa entre las competencias “pensar matemáticamente” y “argumentar matemáticamente”. Esto quiere decir que altas (bajas) calificaciones en una de ellas implica altas (bajas) calificaciones en la otra. Las habilidades relacionadas con entender y manejar el alcance y las limitaciones de un concepto dado se relacionan en forma directa con las habilidades para construir cadenas de razonamiento para justificar un resultado.

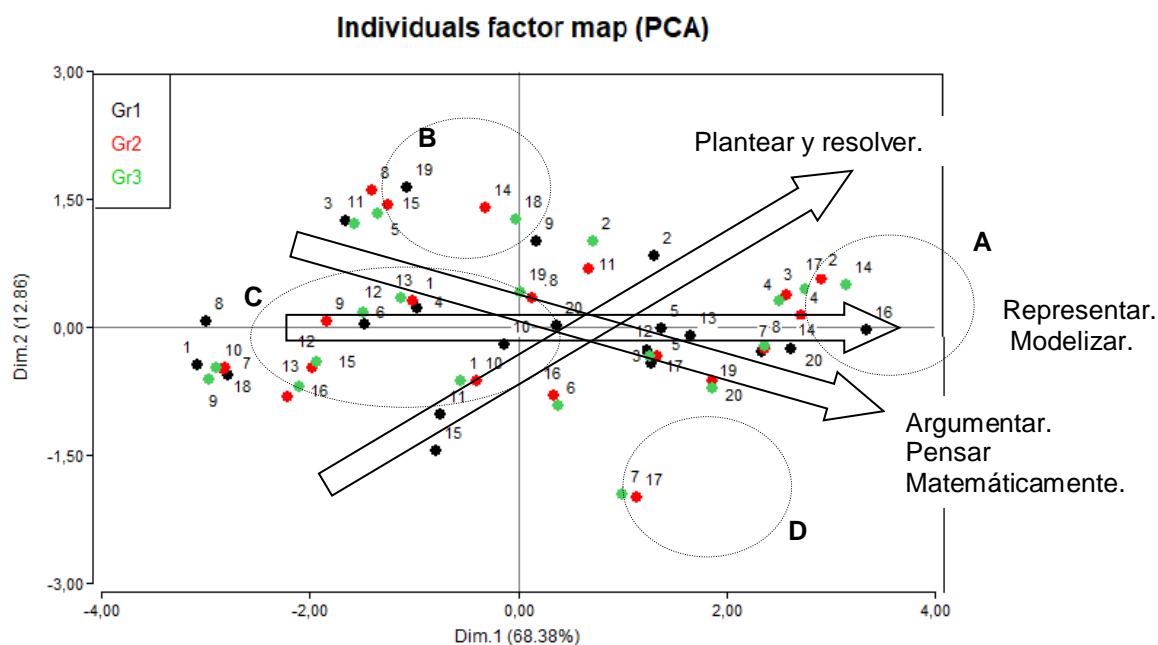
Asimismo, existe relación lineal directa entre las competencias “representar entidades, situaciones y objetos matemáticos” y “modelizar matemáticamente”. Estas dos competencias también tienen relación directa, aunque más baja, con “plantear y resolver problemas matemáticos”. Aquí se entiende que la comprensión global del fenómeno analizado implica la obtención del modelo matemático, la extracción de propiedades del mismo y su representación gráfica.

Las competencias “pensar matemáticamente” y “argumentar matemáticamente” parecen no están relacionadas con “plantear y resolver problemas matemáticos”. Es decir, el hecho de tener habilidades para utilizar correctamente un método de resolución no parece garantizar el desarrollo de capacidades para descubrir regularidades, reconocer limitaciones de un resultado o elaborar razonamientos. Este resultado concuerda con otros estudios realizados en este sentido (Camacho et al., 2007; Guerrero Ortiz et al., 2010; Zang et al., 2013). Por otra parte, en futuros dictados se deberá dedicar más tiempo a los problemas que contengan estas competencias, intentando lograr una mejor integración entre la resolución algebraica y los procesos asociados a la argumentación matemática.

En la Figura 4 se muestra el plano donde se representan los estudiantes. Se agregaron flechas indicando la dirección en que crecen las variables. Para caracterizar un estudiante, se proyecta perpendicularmente el punto que lo representa, sobre las flechas de cada competencia. Si bien este estudio no intenta particularizar las características de cada estudiante, se pueden obtener grupos que tienen tipologías similares y que

contribuyen a analizar las respuestas dadas a los diferentes problemas propuestos. Se analizan cuatro grupos, indicados con letras en la Figura 4.

Figura 4: Proyección de los individuos en el plano principal del AFMD



Fuente: Elaboración propia (2017)

Los estudiantes que componen el grupo A presentan altas calificaciones en todas las competencias evaluadas. Los estudiantes del grupo B presentan notas promedio en plantear y resolver problemas matemáticos, y notas bajas en el resto de las competencias. Este grupo ha desarrollado habilidades en la aplicación de métodos de resolución. Los estudiantes del grupo C tienen bajas calificaciones en todas las competencias. Los dos estudiantes que conforman el grupo D obtuvieron bajas calificaciones en plantear y resolver problemas matemáticos, y notas altas en el resto de las competencias. Estos estudiantes no parecen haber desarrollado habilidades de resolución, sin embargo, han podido argumentar, modelizar y representar gráficamente un fenómeno.



Conclusiones

Pudo observarse que la estructura de asociaciones de las competencias se mantuvo durante los tres cursados que se incluyen en este estudio. Las competencias “representar entidades matemáticas” y “modelizar matemáticamente” presentan una relación lineal directa. Lo mismo ocurre con las competencias “pensar matemáticamente” y “Argumentar matemáticamente”, relaciones que se mantienen en los tres cuatrimestres.

Se pudo detectar que existe una diferencia en el comportamiento de las competencias “pensar matemáticamente” y “plantear y resolver problemas”, las cuales aparecen más asociadas en el primer cuatrimestre que en el segundo y el tercero. Esto podría deberse a cuestiones referidas específicamente a algún cambio en el dictado de la asignatura, donde pequeñas diferencias, conjeturas, ejemplos utilizados en la pizarra hayan variado de un dictado a otro, o bien a leves modificaciones en los enunciados de los ejercicios evaluados en el examen parcial. Estas dos cuestiones pueden provocar que haya una mayor relación entre estas dos competencias, de manera de poder asociar las calificaciones altas en ambas.

La utilización de la técnica análisis factorial múltiple dual permitió analizar la evolución de las asociaciones entre las competencias analizadas a lo largo del tiempo. En este sentido, la técnica brinda herramientas de análisis que favorecen la comprensión del fenómeno en estudio. Una conclusión importante que deriva de este estudio es que con el modelo de dictado de la asignatura por competencias y una forma de evaluación basada en éstas, permite obtener resultados similares año a año. Lo que de algún modo permitiría pensar que de continuar con esta forma de dictado y evaluando por competencias los resultados se mantendrían en estos rangos en el transcurso del tiempo.

Para continuar con esta línea de investigación queda por analizar por qué la competencia “plantear y resolver problemas” no está relacionada con las habilidades de “representar, modelizar y argumentar matemáticamente”. En principio una hipótesis para explicar estos resultados derivaría de la observación empírica que muestra que la habilidad para aplicar un método algebraico de resolución no está necesariamente asociada a procesos más complejos y que implican un conocimiento en profundidad de

los contenidos, propiedades y alcance de un concepto.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of view: Cognitive Difficulties and Teaching Practices. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). **The concept of function. Aspects of epistemology and Pedagogy**, 25. MAA notes USA, pp. 109-132.
- Barbarán Sánchez, J.; Fernández Bravo, J. (2014) El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática. **Enseñanza de las Ciencias** 32.3: 173-186.
- Boyce, W.; DiPrima, R. (1987). **Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera**. México. Ed. Limusa...
- Camacho Machín, M.; Perdomo Díaz, J.; Sánchez Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. González (eds.). **Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación**. Tenerife: SEIEM, pp. 87-106.
- Curia, L.; Lavallo, A. (2014). Análisis de una evaluación por competencias en matemática mediante Técnicas Multivariadas y Mapas Autoorganizados. **Revista Electrónica de Humanidades, Educación y Comunicación Social, REDHECS**. 18: 8-29
- Edwards, C.; Penney, D. (1993). **Ecuaciones Diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera**. México. Prentice Hall.
- Guerrero Ortiz, C.; Camacho Machín, M.; Mejía Velasco, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. **Enseñanza de las Ciencias**, 28(3), pp 341-352.
- Habré, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. **Journal of Mathematical Behavior**, 18(4), pp 455-472.
- Lê, S.; Josse, J.; Husson, F. (2008). FactoMineR: An R Package for Multivariate Analysis. **Journal of Statistical Software**, 25(1), 1-18.
- Lê, S.; Husson, F.; Pagès, J. (2007). DMFA: Dual Multiple Factor Analysis. Proceedings of the XIIth Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference. Grecia.
- Lê, S.; Pagès, J. (2010). DMFA: Dual Multiple Factor Analysis. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, 39(3), 483-492.



- Moreno, T. (2012). La evaluación de competencias en educación. **Sinéctica**, 39. (1-20). Recuperado de http://www.sinectica.iteso.mx/index.php?cur=39&art=39_09
- Nagle, R.; Saff, E.; Snider, A. (2001). **Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. México.** Pearson Educación.
- Niss, M. (2002). **Mathematical Competencies and the learning of Mathematics: The Danish Kom Project.** Recuperado de http://equipsice.uab.cat/file.php/28/Compet_Niss.pdf.
- Niss, M, Højgaard T. (2011). **Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.** English edition nr. 485 – 2011-Roskilde University, Department of Science, Systems and Models, IMFUFA
- Novak, J.D., Gowin, B. (1988). **Aprender a aprender.** España. Martínez Roca.
- R Core Team. (2018). R: **A Language and Environment for Statistical Computing.** R Foundation. for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Tobón, S. (2006). **Formación basada en competencias.** Colombia. Ecoe.
- Valverde Berrocoso, J., Revuelta Domínguez, F., Fernández Sánchez, M. (2012). **Modelos de evaluación por competencias a través de un sistema de gestión de aprendizaje. Experiencias en la formación inicial del profesorado.** Revista iberoamericana de educación. Revista Iberoamericana de Educación. Nº 60. (51-62)
- Zang, C.; Fernández Von Metzen, G.; León, M. (2013). **Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales.** Educ. Matem. Pesquisa. 15(1), pp 83-100.
- Zill, D.; Cullen, M. (2014). **Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera.** México. Ed. Thomson.